

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 4

ISBN 3 - 7896 - 0588 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 1998

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

H. Harreis und N. Treitz

Eine graphische Methode zur Lösung von Problemen aus der relativistischen Physik

1 Vorbemerkung

Compton-Effekt, Paarerzeugung und Paarvernichtung werden im Physikunterricht der Oberstufe behandelt. Diese Beispiele aus der modernen Physik erfordern die Berücksichtigung relativistischer Effekte. Hierzu gibt es für den Unterricht einige Vorschläge, bei denen Herleitung und Anwendung von Formeln oft entscheidender sind als die physikalischen Grundlagen. Wir haben uns daher die Aufgabe gestellt, nach einem alternativen Weg zu suchen und sind dabei auf die im „Zeitalter der Numerik“ etwas in Vergessenheit geratenen graphischen Lösungsverfahren gestoßen. Diese Verfahren können bei größerer Anschaulichkeit und Begreifbarkeit sowohl qualitative als auch quantitative Ergebnisse liefern. Die Anwendung dieser Verfahren im Unterricht setzt allerdings eine längere Eingewöhnungsphase voraus, da Schüler mit graphischen Lösungsverfahren heute nur wenig vertraut sind.

Im Folgenden wird das von uns entwickelte Verfahren vorgestellt. Neben der größeren Anschaulichkeit hat es den Vorteil, daß es auch auf Stoßprobleme der klassischen Physik anwendbar ist.

Es beruht auf der Darstellung von Impuls und Energie in einem einzigen Diagramm, in dem die Energie als Ordinate und der Impuls als Abszisse aufgetragen werden. In dieser „Energie-Impuls-Ebene“ werden nun Energie und Impuls als Komponenten eines Vektors aufgefaßt. Dies ist der aus der Relativitätstheorie bekannte, hier auf zwei Komponenten reduzierte Vierervektor, der üblicherweise aus drei Impulskomponenten und einer Energiekomponente besteht. Zunächst werden nur lineare Bewegungen mit einer Impulskomponente untersucht. Mit der einfach zu erläuternden Erweiterung auf zwei Impulskomponenten können dann viele Probleme zu dieser Thematik bereits in voller Allgemeinheit behandelt werden.

Zur Einführung der graphischen Methode im Unterricht eignet sich am besten ein Beispiel aus der klassischen Physik. Hier bietet sich der elastische Stoß von zwei Gleitern auf einer Luftkissenfahrbahn an. Allerdings ist dieses Beispiel so einfach, daß die Vorteile der graphischen Methode gegenüber der rechnerischen Behandlung nur ansatzweise ersichtlich werden. Sie kommen erst im relativistischen Fall voll zum Tragen. Es ergeben sich jedoch bereits bei komplizierteren Problemen der klassischen Physik spürbare Vorteile. Das sehr einfache Beispiel „zentraler elastischer Stoß“ hat für den Unterricht den Vorteil, daß die Einführung des graphischen Verfahrens mit Experimenten unterstützt werden kann.

2 Vorstellung der Methode und Hinweise zur Einführung im Unterricht

Zur Einführung des graphischen Verfahrens hat sich nach unseren Untersuchungen eine in den Unterricht eingebundene „graphische Schülerübung“ als geeignet erwiesen. Das Ziel ist, das Ergebnis des Aufpralls eines bewegten Gleiters 2 ($m_2=0,2\text{kg}$; Impuls $p_2=0,18\text{kg} \cdot \text{m/s}$) auf einen ruhenden Gleiter 1 ($m_1=0,1\text{kg}$) mit Hilfe der Darstellung in Abb. 1 vorherzusagen. Die hier gemachten Vorschläge wurden in 3 Klassen der Jahrgangsstufe 13 (Grundkurs der Gesamtschule Süd in Duisburg, Grund- und Leistungskurs des Sophie-Scholl-Gymnasiums in Oberhausen) erprobt. Dazu wurden nach entsprechender Wiederholung von Impuls- und Energieerhaltungssatz und Vorbereitung des Zusammenhangs $W_{\text{kin}} = p^2/2m$ jedem Schüler eine Parabel auf Folie, die $W_{\text{kin1}} = p^2/2m_1$ des Gleiters 1 darstellt, und ein Grundblatt mit der zum Gleiter 2 gehörenden Parabel ($W_{\text{kin2}} = p^2/2m_2$) zur Verfügung gestellt.

Die Parabel gibt die möglichen Bewegungszustände eines Gleiters in Form von zusammengehörigen Werten von Impuls und kinetischer Energie wieder, die als Komponenten eines Vektors („Vierer-Vektor“ mit nur einer Impuls-Komponente) aufgefaßt werden können. Solch ein Impuls-Energievektor weist damit stets vom Scheitel der Parabel zu einem Punkt auf der Parabel. Diese Darstellungsart ist gewöhnungsbedürftig. Unter Umständen sollten hier Übungen zum Eintragen von Vektoren zu verschiedenen Bewegungszuständen eines Gleiters vorweggehen.

Zunächst wird der Vektor zu Gleiter 2, in Abb. 1 gestrichelt gezeichnet, in das Grundblatt eingetragen. Dies ist gleichzeitig der Vektor für das Gesamtsystem vor dem Stoß, da der Gleiter 1 ruht. Energie- und Impulserhaltung bedeuten nun, daß nach dem Stoß die Vektoren zu Gleiter 1 und zu Gleiter 2 wieder insgesamt den gleichen Vektor des Gesamtsystems ergeben müssen. Die Spitze des Vektors zu Gleiter 2 nach dem Stoß muß auf der Parabel II ($W_{\text{kin2}} = p^2/2m_2$) liegen (siehe Abb. 1). Den zugehörigen Punkt findet man auf dieser Parabel, indem man die aus Folie ausgeschnittene Parabel I ($W_{\text{kin1}} = p^2/2m_1$) mit der Öffnung nach oben, der Symmetrieachse parallel zur Energieachse und dem Scheitel auf der Parabel des Grundblatts so weit verschiebt, bis der rechte Parabelast I durch den Endpunkt des Vektors des Gesamtsystems vor dem Stoß geht. In Abb. 1 ist Parabel I durch eine geringere Strichstärke angedeutet. Durch den flachen Schnittwinkel zwischen den Parabelästen bedingt ist allerdings der obere Schnittpunkt auf diese Weise nur ungenau festgelegt. Es sollte aber so begonnen werden, da auf diese Weise die Addition der beiden Impuls-Energie-Vektoren besser nachvollzogen werden kann. Eine genauere Festlegung des Schnittpunkts, bei sonst gleichem Sachverhalt, ergibt sich aus der Drehung der Parabel I um 180° (in Abb. 1 jetzt mit größerer Strichstärke gezeichnet). Auf dem Overheadprojektor läßt sich dieses Beispiel mit entsprechenden Folienkopien veran-

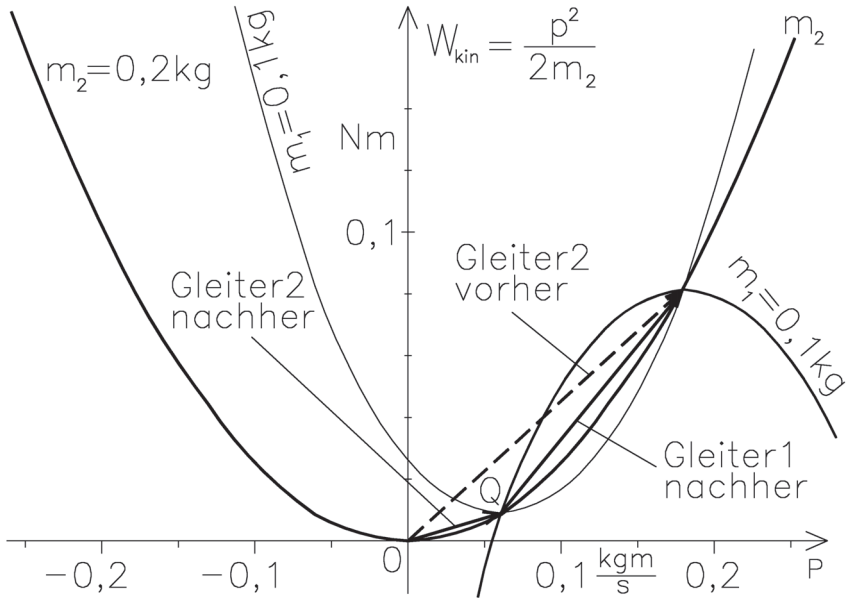


Abb. 1: Gleiter 2 stößt auf den ruhenden Gleiter 1. Die stark ausgezogene Parabel zu Gleiter 1 läßt eine genauere Lagebestimmung der Schnittpunkte der beiden Parabeln zu.

schaulichen. Nach weiteren einfachen Beispielen, die durch Experimente auf der Fahrbahn untermauert werden, können folgende zwei Beispiele (Bewegung beider Gleiter) entweder als Hausaufgabe oder als weitere Übung im Unterricht eingesetzt werden:

Gleiter 2: $p_2 = -0,1 \text{ kg m/s}$; Gleiter 1: $p_1 = +0,14 \text{ kg m/s}$ und:

Gleiter 2: $p_2 = -0,1 \text{ kg m/s}$; Gleiter 1: $p_1 = +0,1 \text{ kg m/s}$.

In Abb. 2 ist die Lösung des 1. Beispiels eingezeichnet.

3 Anwendung der graphischen Methode auf den elastischen Stoß zweier Gleiter auf dem Luftkissentisch

Der Vorteil der integrierten graphischen Darstellung von Energie und Impuls gegenüber dem rechnerischen Ansatz kommt dann voll zur Geltung, wenn man zu Stoßproblemen mit zwei Impulsrichtungen, z.B. zum Stoß von zwei Gleitern 1 und 2 der Masse m_1 bzw. m_2 mit $m_1 < m_2$ auf einem Luftkissentisch übergeht. Im folgenden soll dieser zu Abb. 1 analoge Fall diskutiert werden. Gleiter 2 (Anfangsimpuls p_2) stößt dabei auf den ruhenden Gleiter 1. Den Funktionsgraphen für die kinetische Energie des Gleiters 2 aufgetragen über der Impulsebe-

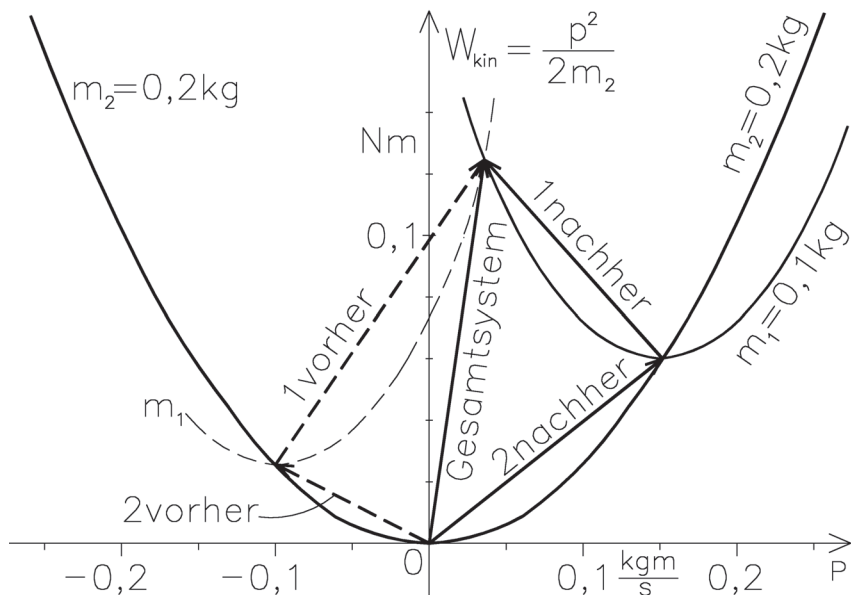


Abb. 2: Gleiter I und Gleiter II haben entgegengesetzte Impulsrichtungen. Die gestrichelt gezeichneten Impuls-Energie-Vektoren addieren sich zum Vektor des Gesamtsystems vor dem Stoß. Die auf dem Grundblatt eingezeichneten Parabeln zum Gleiter I zeigen die Lage der Folienparabeln.

ne, die durch die Achsen p_x und p_y aufgespannt wird, erhält man durch Rotation der Parabel $p^2/2m_2$ um die Achse der kinetischen Energie. Es ergibt sich eine Rotationsparaboloidschale über der Impulsebene.

Analog wird aus der Parabel zu Gleiter 1 in Abb. 1 durch Rotation um die Symmetrieachse auch eine Rotationsparaboloidschale, welche die entsprechende Paraboloidschale des Gleiters 2 durchdringt. In Abb. 3 ist der soeben geschilderte dreidimensionale Sachverhalt der Durchdringung von zwei Paraboloidschalen mit zugehöriger Schnittkurve in einer Mehrtafelprojektion dargestellt. Links oben der Aufriß, links darunter der Grundriß. Im Aufriß sieht man lediglich die Spur (Verbindungsline der Schnittpunkte der beiden Parabeln) der Ellipse als Schnittkurve der beiden Paraboloidschalen. Im Grundriß wird diese Ellipse durch die Projektion zu einem Kreis. Im Seitenriß rechts daneben (Projektion auf die Ebene, die von der Achse der kinetischen Energie und der Achse p_y aufgespannt wird) erscheint die Schnittkurve als Ellipse. Im Grundriß darunter (Projektion auf die p_x - p_y -Impulsebene) wird die Schnittkurve wieder ein Kreis. Im Vergleich zum links daneben gezeigten Grundriß ist dieser um 90° gedreht. Die

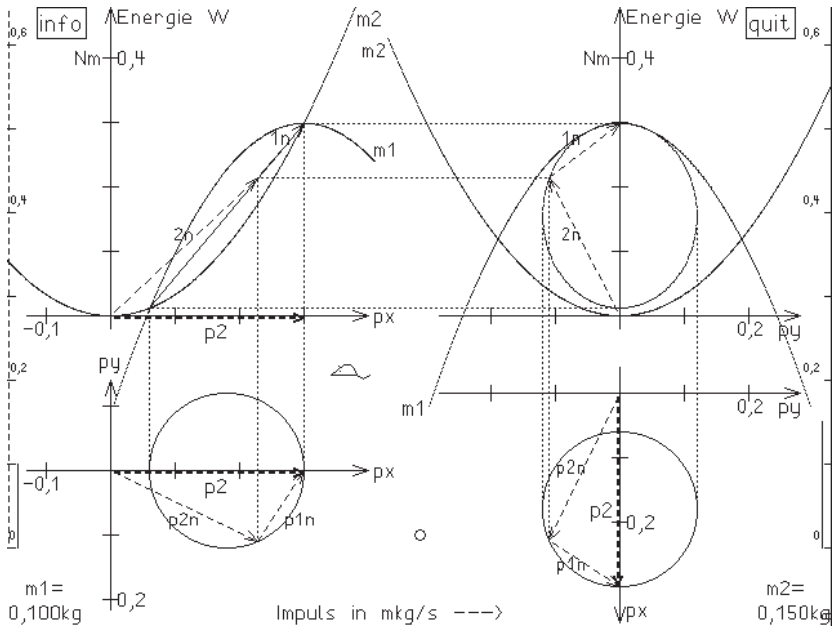


Abb. 3: Ausdruck aus dem Programm LUFTTISC. Die Durchdringung von zwei Rotationsparaboloidschalen wird in einer Mehrtafelprojektion gezeigt. Links oben: Aufriß; links unten: Grundriß; rechts oben: Seitenriß; rechts unten Grundriß (um 90° gedreht!)

gesamte Mannigfaltigkeit der Lösungen dieses auf dem Luftkissentisch ablaufenden Stoßprozesses wird durch alle Punkte auf dieser Schnittkurve gegeben. Jeder Punkt der Schnittkurve charakterisiert ein Paar von Impuls-Energie-Vektoren für beide Gleiter nach dem Stoß. Im Seitenriß und im Grundriß sieht man dies besonders deutlich. In Abbildung 3 ist hierfür ein Beispiel angegeben. Im Grundriß erkennt man deutlich, daß die Impulsvektoren p_{1n} und p_{2n} nach dem Stoß sich zum Vektor p_2 des Gesamtsystems vor dem Stoß zusammensetzen. Das gleiche gilt für die Impuls-Energie-Vektoren im Aufriß und im Seitenriß, wobei es im Seitenriß deutlicher zu sehen ist als im Aufriß.

Um diese Zusammenhänge für verschiedene Ausgangssituationen untersuchen zu können, haben wir ein Computerprogramm (LUFTTISC) erstellt, bei dem die Parameter in weiten Bereichen geändert werden können und das sowohl über die Maus als auch über die Tastatur gesteuert werden kann. Abb. 3 stellt ein mit LUFTTISC erhaltenes Ergebnis dar. Das Programm kann direkt von uns bezogen werden.

4 Anwendung der graphischen Methode auf den Compton-Effekt mit Hinweisen zur Einführung im Unterricht

Die Anwendung der integrierten graphischen Darstellung von Energie und Impuls auf Stoß- bzw. Wechselwirkungsprobleme in der relativistischen Physik ist bereits an anderer Stelle [1-9] beschrieben. Daher sei hier nur beispielhaft die Anwendung auf den Compton-Effekt skizziert.

Für diese Anwendung wäre eine vorhergehende experimentelle Behandlung des Compton-Effektes wünschenswert. Meistens wird im Unterricht darauf aus technischen und zeitlichen Gründen verzichtet. Man beschränkt sich auf die Mitteilung experimenteller Ergebnisse.

Zur Anwendung der graphischen Methode benötigt man zunächst den relativistischen Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie (Ruhenergie + kinetische Energie) eines Elektrons

$$W(p) = \sqrt{W_0^2 + p^2 c^2} \text{ und dem Impuls } p .$$

Bei der Unterrichtserprobung war dieser Zusammenhang in zwei Fällen bereits bekannt, in einem Fall wurde er mit den Schülern durch die Umformung von

$$m(v) = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

hergeleitet. Dazu wurden die Beziehungen:

$$W = m(v) \cdot c^2, W_0 = m_0 c^2, p = m(v) \cdot v$$

verwendet. Die graphische Darstellung der Hyperbel $W(p)$ gegen $p \cdot c$ aufgetragen wird mit Zeichendreieck und Zirkel mit den Schülern erarbeitet. Man beginnt mit der Abtragung der Ruhenergie W_0 vom Nullpunkt aus nach oben. Für jeden Wert $p \cdot c$ findet man die zugehörige Energie $W(p)$ als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Ruhenergie W_0 (Ordinate) und dem Wert $p \cdot c$ (Abszisse) als Katheten. Die Länge der Hypotenuse

$$W(p) = \sqrt{W_0^2 + p^2 c^2}$$

wird mit dem Zirkel im Abszissenpunkt $p \cdot c$ vertikal nach oben abgetragen, um einen Punkt der gesuchten Hyperbel zu erhalten. Die Asymptoten der Hyperbel sind die beiden Geraden mit der Beziehung $W = |p| \cdot c$. Der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls für das ruhemasselose Photon folgt aus der Beziehung für das Elektron einfach durch Streichen der Ruhenergie zu $W(p) = |p| \cdot c$. Da in diesen relativistischen Impuls-Energie-Beziehungen der Impuls mit c multipliziert wird, akzeptieren die Schüler, daß man bequemerweise $p \cdot c$ auf der Abszisse aufträgt.

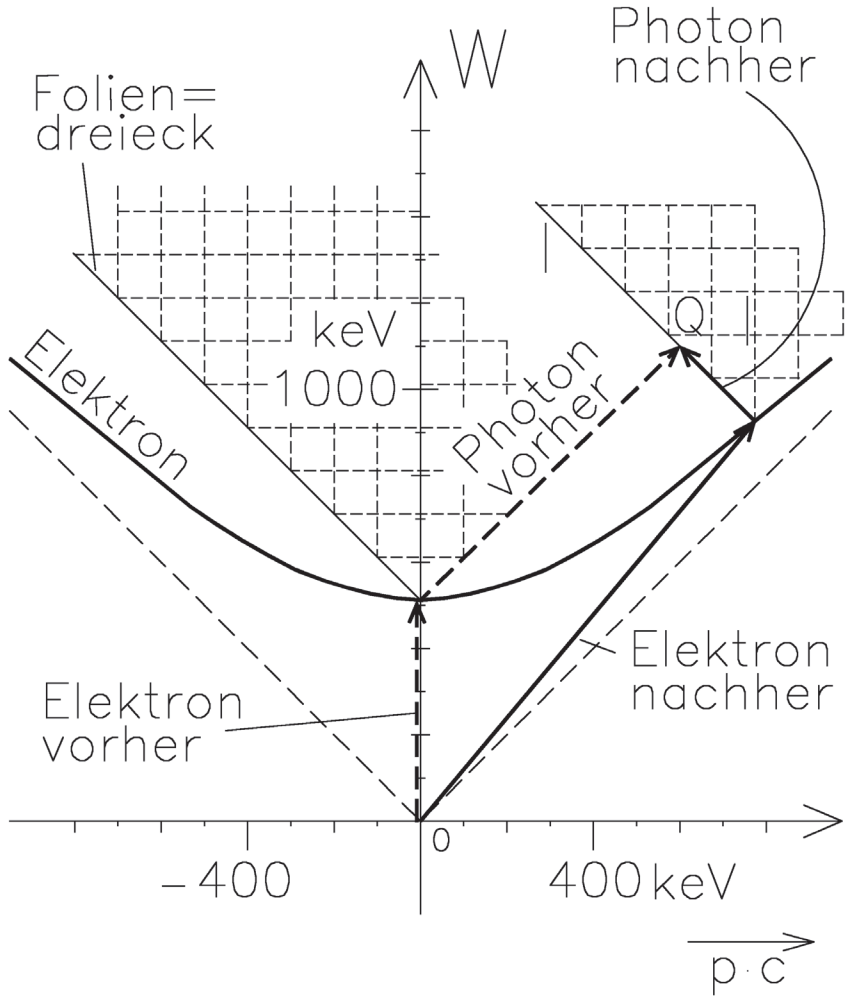


Abb. 4: Compton-Effekt, Rückstreuung als „graphische Schülerübung“. 1. Beispiel. Ein primäres Photon mit einer Energie von 600 keV löst ein rückgestreutes Photon von ca. 180 keV und ein vorwärts gestreutes Elektron mit einer kinetischen Energie von ca. 420 keV aus.

Auf den Compton Effekt, wie er üblicherweise unterrichtet wird, läßt sich damit die erarbeitete graphische Methode direkt anwenden.

Im Anschluß daran bietet sich eine „graphische Schülerübung“ an. Jeder Schüler erhält dazu ein Grundblatt mit der eingezeichneten Hyperbelkurve für das Elektron und ein aus Folie ausgeschnittenes rechtwinkliges Dreieck, das den

Zusammenhang $W(p) = |p| \cdot c$ beschreibt. Es läßt sich auch z. B. ein Geodreieck verwenden. Das Elektron vor der Wechselwirkung sei in Ruhe. Das einlaufende Photon habe eine Energie von 600 keV.

Abb. 4 zeigt wie das Dreieck eingesetzt wird, um zur Lösung zu gelangen. Der Impuls-Energie-Vektor des Elektrons „vorher“ und der des Photons „vorher“ (in Abb. 4 gestrichelt) werden addiert, wobei die Spitze des Vektors den Punkt Q des Gesamtsystems vor der Wechselwirkung angibt! Die Vektoren von Photon und Elektron „nachher“ müssen zusammengesetzt wieder in Q enden. Auf den Achsen können direkt die Energie des rückgestreuten Photons und des gestreuten Elektrons sowie die zugehörigen Impulse abgelesen werden. Es kann auch noch einmal nachgeprüft werden, daß bei dieser graphischen Methode der Energie- und Impulserhaltungssatz erfüllt sind.

Im Unterschied zur rechnerischen Behandlung läßt sich hier jeder beliebige Bewegungszustand des Elektrons vor der Wechselwirkung mit dem Photon genauso einfach erfassen. Auch lassen sich weitere Fragen folgender Art mühelos beantworten: Was passiert, wenn Elektron und Photon vorher sich in gleicher bzw. in entgegengesetzter Richtung bewegen? Kann man ein Elektron, das sich bewegt, nur unter dem Gesichtspunkt von Energie- und Impulserhaltung durch die Wechselwirkung mit einem Photon zum Stillstand bringen? Welche Energie muß ein solches Photon haben? Durch eine geringfügige Verschiebung des Dreiecks kann z.B. die letzte Frage, die eine Lösung zur Aufgabe mit den Daten: primäres Elektron: $p \cdot c = -300\text{keV}$; primäres Photon: $p \cdot c = +500\text{keV}$ darstellt, mit Abb. 5 beantwortet werden.

5 Weitere Anwendungen

Die Paarvernichtung eines Positrons und eines Elektrons kann mit dieser graphischen Methode auf einfache Weise dargestellt werden (siehe [3] und [7]). Weiterhin lassen sich die Energie- und Impulsbilanz bei der Emission und Absorption von Photonen graphisch veranschaulichen (siehe [4]). Die Beziehung für den relativistischen Dopplereffekt läßt sich mit Hilfe der graphischen Methode ohne explizite Verwendung der Lorentz-Transformation ableiten. Implizit geht die Lorentz-Transformation über die relativistische Energie-Impuls-Beziehung in die Darstellung ein ([5]).

Die Erzeugung neuer Teilchen, wie sie in der Hochenergiephysik üblich ist, kann man sowohl durch Beschuß eines im Laborsystem ruhenden Target-Teilchens als auch durch den Stoß zweier entgegengesetzt laufender Teilchen erreichen. Man benötigt dabei bestimmte Mindestenergien für die Geschossteilchen. Die hier vorgestellte graphische Methode erlaubt eine relativ einfache quantitative Lösung dieses Problems (siehe auch [5]).

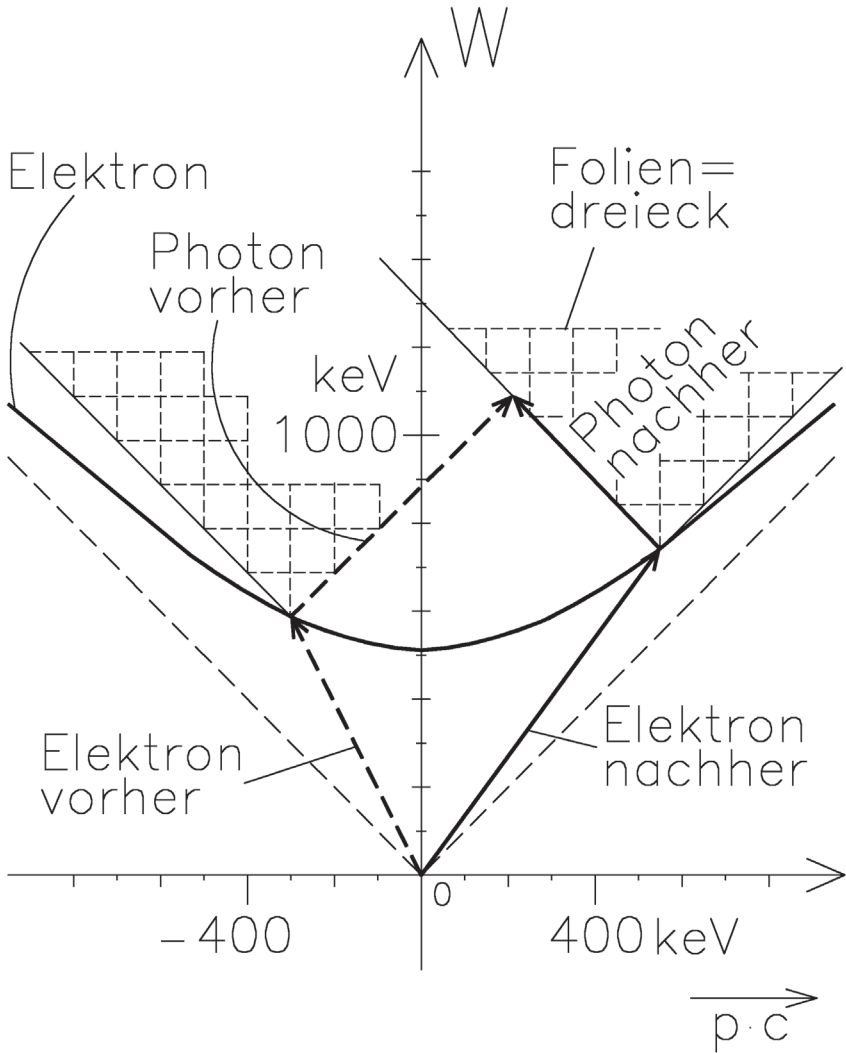


Abb. 5: Rückstreuung beim Compton-Effekt als „graphische Schülerübung“
 Ein primäres Photon mit $p \cdot c = + 500$ keV und ein primäres Elektron mit $p \cdot c = -300$ keV ergeben ein sekundäres Photon mit einer Energie von 350 keV und ein vorwärts gestreutes Elektron mit 230 keV kinetischer Energie.

6 Literatur

- [1] H. Harreis und N. Treitz: Eine graphische Methode, Energie- und Impulsbilanzen zu veranschaulichen, PdN-Ph 2/46 (1997), S. 6
- [2] H. Harreis und N. Treitz: Graphische Darstellungen, ein Modell und ein Computerprogramm zum *Compton*-Effekt, PdN-Ph. 2/46 (1997), S. 9
- [3] H. Harreis und N. Treitz: Graphische Repräsentation und ein Computerprogramm zur "Paarvernichtung" von e^+ und e^- , PdN-Ph. 2/46 (1997), S. 14
- [4] H. Harreis und N. Treitz: Eine graphische Veranschaulichung der Impuls- und Energiebilanzen bei Absorption und Emission von Photonen, PdN-Ph. 2/46 (1997), S. 16
- [5] H. Harreis und N. Treitz: Die graphische Transformation ins Schwerpunktsystem, angewandt auf die Erzeugung von Teilchen in der Hochenergiephysik sowie auf die Erklärung des Dopplereffekts, PdN-Ph. 2/46 (1997), S. 19
- [6] H. Harreis und N. Treitz: Vorschläge zur Einführung der graphischen Methode z.B. zum *Compton*-Effekt im Physikunterricht, PdN-Ph. 2/46 (1997), S. 22
- [7] H. Harreis: Ein dreidimensionales Modell zur relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für die Paarvernichtung, in: Didaktik der Physik, DPG-Tagung, Jena 1996, S. 373
- [8] H. Harreis und N. Treitz: Models in order to support the explanation of relativistic interaction (Compton-effect and annihilation of e^- and e^+), in: Proceedings of the Girep conference, Ljubljana 1996, S. 553
- [9] H. Harreis u. N. Treitz: A graphical method for the solution of relativistic interaction (f.i. Compton-effect, anihilation of e^- and e^+ and other examples), in: Proceedings of the Girep conference, Ljubljana 1996, S. 343
- [10] D.E. Liescher: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal, Akademie, Berlin 1991