Arbeitskreis Bayerischer Physikdidaktiker

Beiitrag aus der Reihe:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 2

Anregungen für Unterricht und Lehre

ISBN 3 - 7896 - 0100 - 4

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1991

Anmerkung:

Manfred Achilles

Zu den Grundsätzen des physikalischen Maßsystems

Einleitung

Die ersten Gesetze der Elektrizität sind ohne Vorhandensein eines geeigneten Maßsystems aufgestellt worden. Das hatte zur Folge, daß beispielsweise das Coulombsche Gesetz (1785), das erste "Gesetz" aus dem Bereich der Elektrizität, das Ampèresche (1820/1822), das Biot-Savartsche (1820) und auch das Ohmsche Gesetz (1826/27) nur Proportionalgesetze waren. Auf den Gedanken, die magnetischen und elektrischen Erscheinungen mit Hilfe der mechanischen Größen zu messen, war bislang noch keiner gekommen, war auch nicht notwendig, da die Freude über die gewonnene Erkenntnisse die Anwendungen zum Zwecke des Messens in den Hintergrund treten ließ. Der entscheidende Anstoß, die neuen magnetischen und elektrischen Gesetze für die Praxis zu nutzen, stammt von Carl Friedrich Gauß (1777-1855), der hier, wie auch in den von ihm bevorzugten mathematischen Fragen, den Sinn für das Praktische nie aus den Augen verlor. Am 15.12.1832 hielt er den berühmten, später veröffentlichten Vortrag zum Thema: "Intensitas vis magneticae terrestris ad mensurum absolutam revocata" (Wie man die erdmagnetische Kraft auf absolute Messung zurückführen kann). Unter dem Wort "absolut" wollte Gauß zunächst nur die Unabhängigkeit der magnetischen Messungen von Störparametern verstanden wissen; später erhielt es den Sinn, daß magnetische und elektrische Größen **allein** mit Kräften und anderen Größen der Mechanik gemessen werden können.

Den Einfall, magnetische und elektrische Eigenschaften auf Kräfte zurückzuführen, war Gauß wohl aus der Zusammenarbeit mit dem eben in Göttingen berufenen Wilhelm Weber (1804-1891) gekommen, der mit angefertigten Magnetometern die erdmagnetischen Elemente zu registrieren begann. Ein "Abfallprodukt" dieser Beschäftigung war die Konstruktion des Induktionstelegrafen (1833), der über ein Jahrzehnt der Kommunikation zwischen Sternwarte und Physikalischem Kabinett (1 km Entfernung) diente.

Der Gedanke von Gauß war der Zeit vorausschauend und bedurfte bis heute keinerlei Korrektur. Er wird durch das viel später entstandene, dem Mathematiker D. Hilbert (1862-1943) zugeschriebene Bonmot charakterisiert: "Die Physik ist für die Physiker viel zu schwierig!" Allerdings war es ein weiter Weg, diesen Einfall zu praktizieren, erst um 1860 waren die Meßverfahren so entwickelt, daß man von Maßsystemen (magnetischen und elektrischen M.) sprechen konnte. Verdienste erwarben sich u.a. bei dieser Aufgabe W. Weber, W. Thomson (der spätere Lord Kelvin, 1824-1907) und W. v. Siemens (1816-1892), der allerdings ein praktisches Maßsystem, das das Ohmsche Gesetz als Grundlage verwandte, für Widerstandsmessungen der Telegraphenleitungen bevorzugte.

Die Thomsonsche Stromwaage

William Thomson griff den Gedanken von Gauß und Weber auf und versuchte ab 1845 die Ampèresche Stromwaage so zu verändern, daß die entstehenden elektromagnetischen Kräfte einer Messung dienen konnten. Die geraden und kurzen Leiter, die Ampère verwandte, bedurften so großer Ströme (I>10 A), um nennenswerte Kräfte zu erzeugen, daß sie zum quantitativen Bestimmen der Ströme ungeeignet waren. Thomson benutzte dagegen Spulenpaare, die den Abmessungen der sog. Helmholtzschen Spulen glichen aber **entgegengesetzt** gepolt waren. Thomson gibt eine einfache Konstuktionsskizze, die in Fig.1 wiedergegeben ist. Man beachte

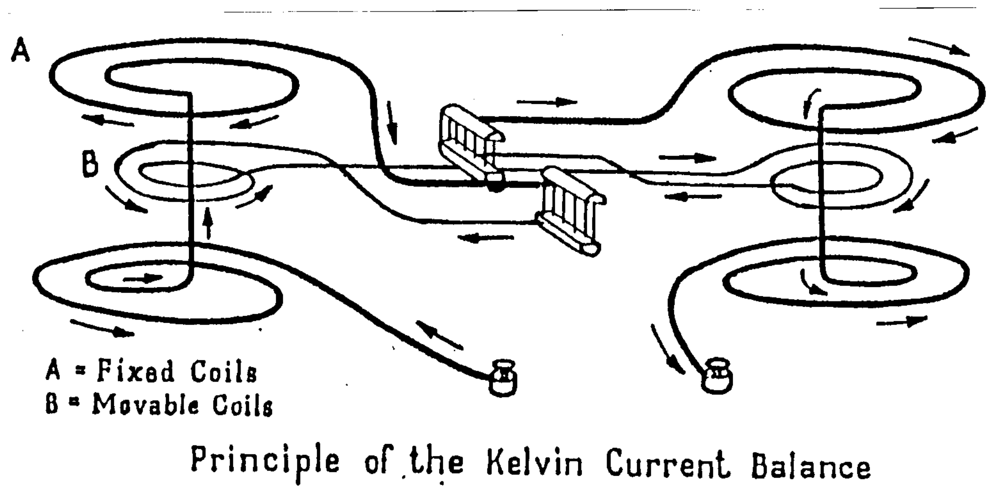

Fig. 1: Originale Skizze von Thomson zur Stromwaage (aus Young, 1948)

auf der Skizze die entgegengesetzte Stromlaufrichtung, die durch Pfeile kenntlich gemacht worden ist. Die Spulenpaare erzeugen nicht - wie Helmholtzspulen - ein homogenes Feld, sondern wegen der umgekehrten Polung ein **linear inhomogenes** Feld (Feldgradient dB/dz=const), in welchem eine dritte, stromführende Spule, die hier als magnetischer Dipol aufzufassen ist, eine Kraft erfährt. Thomson hat sicher das Biot-Savartsche Gesetz benutzt, um die Kräfte zwischen allen Stromleiterelementen Idl unter Berücksichtigung der Winkel zu integrieren. Dieser Weg ist mühsam, wurde vom Verfasser probeweise beschritten und führte praktisch zum folgenden, gleichen Ergebnis.

Durch Benutzung moderner Begriffe ist nämlich die Berechnung der Kraft, die auf den magnetischen Dipol (die innere Spule) wirkt, viel einfacher. Dem Dipol - der inneren, kleineren Spule - kann man ein magnetisches Dipolmoment $G=n \cdot I \cdot A$ (n=Windungszahl der beweglichen Spule, I=Stromstärke, A=Spulenfläche) zuordnen, das im inhomogen magnetischen Feld die Kraft erfährt

$$F = G \cdot dB/dz$$

(B=magn.Kraftflußdichte, z=Richtung der gemeinsamen Spulennormalen, dB/dz=Feldgradient)
Nach einigen Jahren hatte die Stromwaage die Form, wie auf Fig. 2 wiedergegeben.

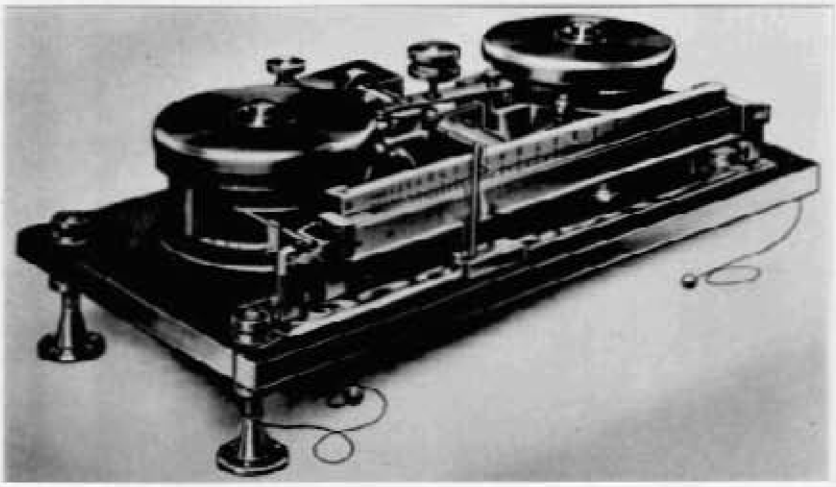

Fig. 2 Kelvin Ampère Balance (aus Young, 1948)

Nicht jede Einzelheit war auf der Photographie zu deuten, deshalb hat der Verfasser nach den Funktionsprizipien eine eigene, ähnliche Konstruktion gewählt, die auf Fig. 3 gezeigt ist. Sie folgt letztlich dem Prinzip einer Küchenwaage mit Schiebegewicht. Wenn bei Stromfluß (durch alle sechs Spulen fließt derselbe Strom) die Waage aus dem Gleichgewicht gerät, wird mit Hilfe des Schiebegewichtes wieder der vorherige Nullpunkt der Waage eingestellt, der mit Hilfe eines Lichtzeigers (oben dient dazu ein Spiegel mit Linse) kontrollierbar ist. Falls man die Rechnung im uns geläufigen SI-System durchführt, nutzt man verdeckt die Erkenntnisse, die erst der Kohlrausch-Weber-Versuch lieferte. Die Herleitung erfolgt deshalb zunächst im CGS-System: Das Schema einer Waagenseite ist in Fig. 4 gezeigt. Man sieht, daß das geometrische Maß R sich wiederholt, R ist sowohl der Radius als auch der Abstand der großen Spulen, ebenfalls ist es der Durchmesser der kleinen Spule. Dadurch wird die Endformel besonders einfach.

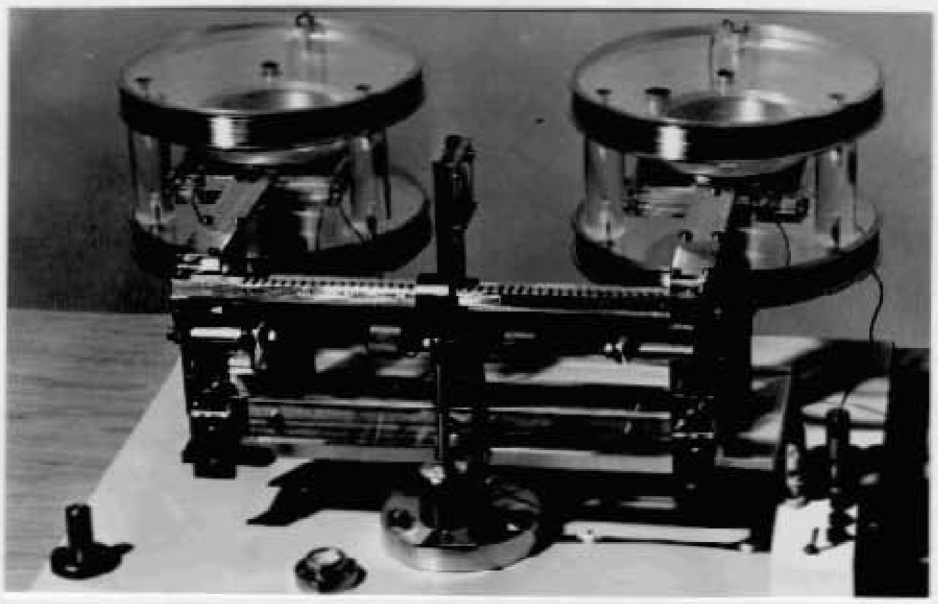

Fig. 3 Nachbau der Thomsonsche Stromwaage

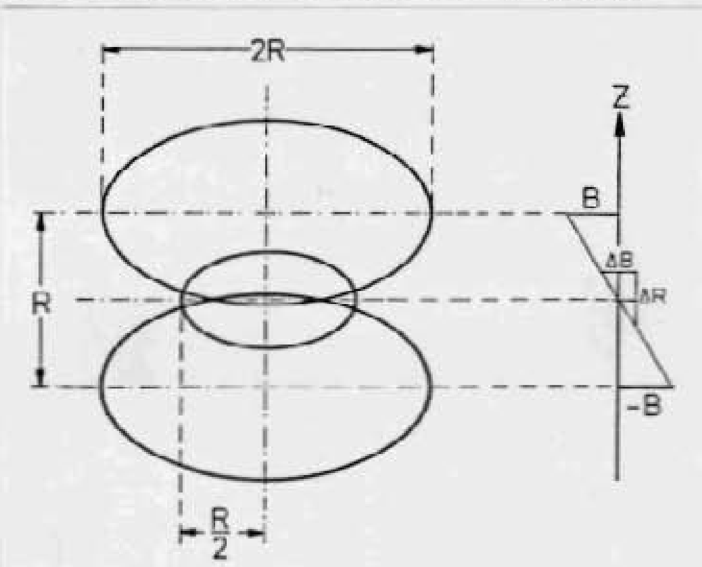

Fig. 4 Schema zur Aufstellung der Rechenformel

Es ist $F=G\cdot dB/dz$ (Z-Richtung achsial), wobei $G=J(R/2)^2\pi\ n_2$ und
$dB/dz=2B/R$ und $B=4\pi\ In_1/2R$.

Das 4π muß wegen des CGS-Systems stehen, im SI-System entfällt es.
Eingesetzt ist die Kraft $F=\pi^2\cdot n_1\cdot n_2\cdot J^2$. Aus dem Ergebnis ist zu erkennen, daß der elektrische Strom **allein auf die Wurzel einer Kraft** zurückgeführt werden kann; alle geometrischen Größen heben sich weg, die Windungszahlen vervielfachen lediglich die Kraft, haben aber auf das Maßsystem keinen Einfluß. Es ist zu beachten, daß die Stromwaage im Gegensatz zu gebräuchlichen Meßinstrumenten eine quadratische Anzeige hat. Durch die Festlegung der Kraft-

einheit (im CGS-System das dyn) ist damit auch die Stromeinheit bestimmt. Kann die Stromwaage durch eine Kraft von 4100 dyn (für beide Seiten der Waage; die Windungszahlen betragen beim Nachbau 143 und 145 Wdg.) wieder in die Gleichgewichtslage gebracht werden, fließt ein elektrischer Strom von 0,100 $CGS_{el.magn.}$ ($CGS_{el.magn.}$ = Wurzel aus dyn) das Ergebnis entspricht im SI gerade 1A).

Die Thomsonsche Spannungswaage

Überraschenderweise nutzte Thomson die Spannungswaage, ein Gerät, das in vielen Anfängerpraktika verwandt wird, erst gegen 1853 zur Definition der elektrischen Spannung, obwohl die elektrostatische Anziehung (Coulombsches Gesetz) viel länger bekannt und wegen der skalaren Eigenschaft der Ladung einfacher zu handhaben ist. Die Fig. 5 zeigt einen Nachbau einer Thomsonschen Spannungswaage. Eine bewegliche, geerdete Kondensatorplatte hängt an einer empfindlichen Balkenwaage. Ein ebenfalls geerdeter "Schutzring" - er dient zur Homogenisierung des Feldes über den Plattenrand hinaus - besitzt zum Justieren der Waagrechten drei Schneiden und drei isolierende Abstandshalter und liegt auf der spannungführenden Platte, deren Horizontale durch Stellschrauben einzuregeln ist. Mittels eines Tariergewichts ist die Waage im spannungslosen Zustand so in die Gleichgewichtslage zu bringen, daß die bewegliche Platte gerade die Schneiden berührt. Übersteigt jetzt nach Anlegen einer Spannung die elektrostatische Kraft die Gewichtsvorlage auf der Waagschale, reißt der bewegliche Teller von den Schneiden ab und entlädt den unteren. Eine Kippschwingung der

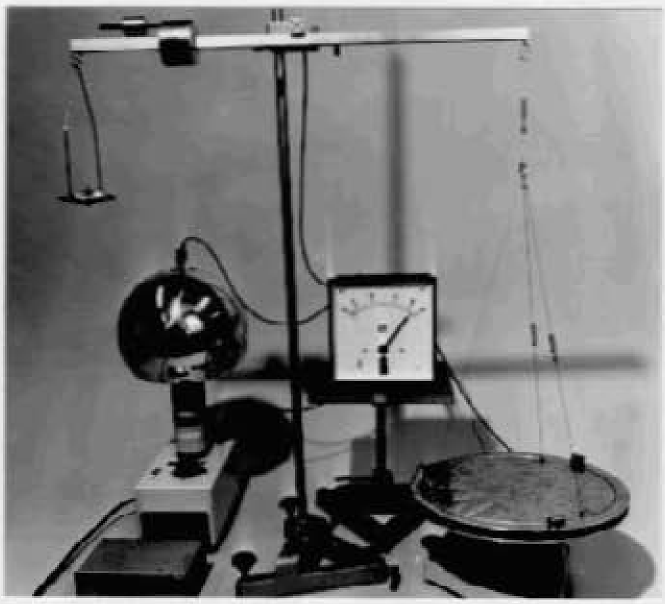

Fig.5 Nachbau einer Thomsonschen Spannungswaage

Waage setzt ein, bei der die Abreißspannung genau zu beobachten ist, wenn die Kippfrequenz genügend klein ist. Es sind natürlich hochohmige Hochspannungsgeneratoren zu benutzen, die durch Kurzschlüsse keinen Schaden nehmen. Bei dieser Waage sind Spannungen bis zu 20 kV verwendbar. Die Anzeige ist wiederum quadratisch.

Das Schema, nach die Rechenformel aufgestellt wird, zeigt Fig. 6. Wiederum wird die Rechnung im CGS-System zunächst bevorzugt. Die Kraft im elektrostatischen, homogenen Feld ist der Gradient der Feldenergie W, nämlich

$F= - dW/dz$ wobei $W=1/2\ CU^2$ und $C=A/4\pi z$.

z=Plattenabstand, C=Kondensatorkapazität, U=el.Spannung, $A=\pi r^2$=Plattenfläche

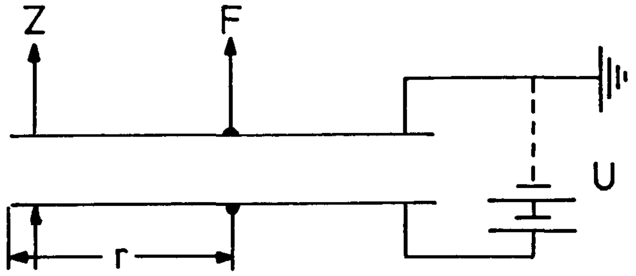

Fig. 6 Schema einer Spannungswaage

Zu beachten ist, daß im CGS-System die Kapazität eines Plattenkondensators mit homogenem Feld durch 4π zu teilen ist.

Die elektrostatische Kraft F wird dann:

$$F = r^2 \cdot U^2 / 8 \cdot z^2$$

Da sich die geometrischen Größen r und z dimensionsmäßig heben, kann - wie im elektromagnetischen Fall - die elektrische Spannung **allein auf die Wurzel einer Kraft** zurückgeführt werden. Das führt zur befremdlichen Tatsache, daß sowohl die Stromstärke als auch die Spannung die gleiche Dimension (Einheit: Wurzel aus dyn, bei Verwendung von cm, g, s) haben, sie müssen also vernünftigerweise einem unterschiedlichem Maßsystem angehören.

Reißt die Spannungswaage bei einem Übergewicht von ca.6,28g ab, übersteigt also die elektrostatische Kraft diesen Wert (bei r=11,1cm und z=1cm), beträgt die erforderliche Spannung $20 CGS_{el.stat.}$ ($CGS_{el.stat.}$ = Wurzel aus dyn). Nach der Anzeige eines statischen Voltmeters entspricht das gerade einer Spannung von 6000V.

Die Unverträglichkeit der frühen elektromagnetischen Maßsysteme konnte erst durch den mühsamen sog. R.Kohlrausch-Weber-Versuch (1856) vorläufig, durch die Maxwellsche Theorie (ab 1865) endgültig geklärt werden: Die Verbindungsgröße erwies sich als die Lichtgeschwindigkeit, von Weber zunächst "Grenzgeschwindigkeit" (er erhielt die halbe Lichtgeschwindigkeit, weil er gleich schnelle positive und negative Ladungsträger voraussetzte) genannt. Dieser Versuch war notwendig und das Ergebnis war durch keinerlei theoretische Erwägungen voraussehbar, soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

Ich benutze hier ein Plausibilitätsverfahren, um die beiden Feldkonstanten der Elektrizitätslehre, die bekanntlich nur im SI-System auftreten und die Lichtgeschwindigkeit in den elektrischen und magnetischen Formeln des CGS-Systems enthalten, zu begründen. Im folgenden soll das erläutert werden.

Diskussion der Leistungsformel

Die uns aus dem SI-System geläufige elektrische Leistungsformel lautet $P = I \cdot U$. Sie sollte auch gelten, wenn man die sich ergebenden Einheiten der absoluten Stromstärke- und Spannungseinheit verwendet. Die Einheitengleichung lautet dann:

$$1\ \mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm/s} = 1\ \mathrm{dyn}^{1/2} \cdot 1\ \mathrm{dyn}^{1/2} \cdot x$$

Man sieht sofort, daß die Gleichung **dimensionsmäßig falsch** ist, denn die linke Seite ist eine Leistungseinheit (dyn cm/s), die rechte dagegen eine Krafteinheit (dyn); die rechte Seite ist folglich mit einer Geschwindigkeit zu multiplizieren (x), um dimensionsmäßige Übereinstimmung herzustellen.

Macht man sich die Größe der Einheiten mit dem uns geläufigem SI-System klar, erkennt man sofort, daß diese Gleichung auch **zahlenmäßig falsch** ist, denn: $10\ \mathrm{A} \cdot 300\ \mathrm{V} = 3000\mathrm{W}$ das entspricht $3 \cdot 10^{10}$dyn cm/s ($1\mathrm{W} = 10^{7}\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm/s}$). Die Gleichung für die elektrische Leistung wird nur erfüllt, wenn die elektrischen Einheiten mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^{10}\mathrm{cm/s}$ multipliziert werden.

$$P = I\ [\mathrm{CGS}_{\mathrm{el.magn.}}] \cdot U\ [\mathrm{CGS}_{\mathrm{el.stat.}}] \cdot c\ [\mathrm{cm/s}]$$

Auch für jedes andere Maßsystem lautet die Leistungsformel

$P = I \cdot U \cdot c$ wenn Strom und Spannung aus den Kräften definiert werden. Allerdings führen sie, besonders bei Verwendung von m, kg, s, zu Einheiten, die für den Umgang wenig geeignet sind. Die Forderungen an ein praktikables, auch für die Technik geeignetes Maßsystem sind folgende:

1) Einfügen der Lichtgeschwindigkeit c in den elektromagnetischen Formeln in neue Konstanten.

2) Das CGS-System stammt, der Newtonschen Mechanik entsprechend, aus der Vorstellung von Zentralkräften (Fernwirkungstheorie). Im Bilde der späteren Faradayschen Feldvorstellungen (Nahewirkungstheorie) verursachen aber "Zentren"

radiale Felder. Das führt dazu, daß Feldformeln, die **homogene** (und keine radialen) Felder beschreiben, den Faktor 4π benötigen. Es entspricht einer gewissen Logik, in die neuen Konstanten den Faktor 4π so hineinzunehmen, daß nur Formeln zur Beschreibung **radialer** Felder ihn erhalten, er aber bei Darstellung homogener Felder entfällt.

3) Es sollen in Anpassung an den Galvanismus die Einheiten Volt und Ampère benutzt werden, die aber zueinander ein anderes Verhältnis haben, als die absoluten Einheiten:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}_{\mathrm{el.stat.}}}}{\sqrt{\mathrm{dyn}_{\mathrm{el.mag.}}}} \mathrel{\hat{=}} \frac{300\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{A}} = 30\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Zu 1) Einfügen der Lichtgeschwindigkeit c zur Strom- und Spannungseinheit:

$$(1) \qquad P = J\left[\sqrt{F\cdot c}\right]\cdot U\left[\sqrt{F\cdot c}\right]$$

Zu 2) Vertauschung von "radialen" mit "homogenen" Feldformeln:

$$(2) \qquad P = J\left[\sqrt{\frac{F\cdot c}{4\pi}}\right]\cdot U\left[\sqrt{F\cdot c\cdot 4\pi}\right]$$

Zu 3) Einführung der neuen Einheiten Volt und Ampère:

$$(3a) \qquad P = J\left[\sqrt{\frac{F\cdot c}{4\pi\cdot 30\,\frac{V}{A}}}\right]\cdot U\left[\sqrt{F\cdot c\cdot 4\pi\cdot 30\,\frac{V}{A}}\right]$$

Die hinzugefügten Faktoren faßt man zweckmäßigerweise bei Verwendung von m, kg, s, A und V in zwei neue Konstanten zusammen, nämlich μ_0 und ε_0.

$$\mu_0 = \frac{4\pi\cdot 30\,\frac{V}{A}}{c\,\frac{m}{s}} \qquad\qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 30\,\frac{V}{A}\cdot c\,\frac{m}{s}}$$

Die endgültige Formel für die elektrische Leistung heißt dann im SI-System:

$$(3b) \qquad P\left[\frac{Nm}{s}\right] = J\left[\sqrt{\frac{N}{\mu_0}}\right]\cdot U\left[\sqrt{\frac{N}{\varepsilon_0}}\right]$$

Durch das Verhältnis von V/A sind die beiden neuen Einheiten aber keineswegs bestimmt; zudem heben sie sich bei Multiplikation der Wurzeln wieder heraus. Die erste Wurzel ergibt nur dann die Einheit "Ampère", die zweite nur dann die

Einheit "Volt", wenn auch über das Produkt AV verfügt wird. Zweckmäßigerweise wird das Produkt gleich der im SI-System sich ergebenden Leistungseinheit gesetzt, nämlich Nm/s=AV. Dann verwandelt sich (3b) in:

$$P[A\cdot V] = J[A]\cdot U[V] \qquad \text{(3c)}$$
$$P[W] = J[A]\cdot U[V]$$

Wegen N=10^5dyn und m=10^2cm ist 1 Nm/s=10^7 dyncm/s, das ist 1 Watt.
Die Gleichungen (3c) erwecken den Eindruck, als ob die Lichtgeschwindigkeit c, bzw. die Feldkonstanten μ_0 und ε_0 nicht enthalten seien, was aber - wie ich darzulegen versuchte - nicht wahr ist.

Genaue Messungen ergaben, daß das Verhältnis zwischen Spannung und Strom nicht 30 V/A, sondern nur 29,979 V/A ist. Das ist $|c|\cdot 10^{-7}$ V/A (c nur als Zahl 2,9979 $\cdot$ 10^8). Setzt man statt 30 nun den genauen Wert, wird

$$\mu_0 = \frac{4\pi\cdot|c|\cdot 10^{-7}\,\frac{V}{A}}{c\,\frac{m}{s}} \quad \text{das ist} \quad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} \qquad (4)$$

μ_0 enthält also nur noch die Umrechnung vom radialen zum homogenen Feld und den Potenzfaktor, der die Umrechnung der Leistungseinheit vom CGS- zum SI-System darstellt.

Führt man anstatt 30 den Faktor $|c|\cdot 10^{-7}$ in die Konstante ε_0 ein, ergibt sich:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot|c|\cdot 10^{-7}\,\frac{V}{A}\cdot c\,\frac{m}{s}} \quad \text{das ist} \quad \varepsilon_0 = \frac{10^{-7}\,As}{4\mu\cdot|c|^2\,Vm} \qquad (5)$$

Die Formel (5) ist zwar zahlenmäßig richtig, löst aber den Widerwillen eines Physikers aus, weil die Lichtgeschwindigkeit c einmal als Größe, einmal als Zahl auftritt. Die Formel gibt die Möglichkeit, die Lichtgeschwindigkeit allein aus elektrischen Messungen durch Bestimmung von ε_0 zu messen.

Zusammenfassung

Auch unser gebräuchliches SI-Maßsystem ist in Wahrheit ein modifiziertes absolutes Maßsystem, wie das "alte" CGS-System es ist; eine andere Möglichkeit des sinnvollen Messens elektrischer und magnetischer Größen gibt es offenbar nicht. Die physikalische Leistung von Carl Friedrich Gauß steht den Leistungen in der Mathematik nicht nach.

Es ist Aufgabe eines Lehrenden, auch alte, "gelöste" Probleme der Physik immer wieder neu zu durchdenken.