

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

## **BEITRAG AUS DER REIHE:**

Werner B. Schneider (Hrsg.)

# Wege in der Physikdidaktik

Band 2

Anregungen für Unterricht und Lehre

ISBN 3 - 7896 - 0100 - 4

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1991

### Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.  
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.  
Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.  
Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle  
genutzt werden. Auf der Homepage  
[www.solstice.de](http://www.solstice.de)  
werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

## Synergetik: Von Paradigmen zu praktischen Anwendungen

*“Während der letzten zwei Jahrzehnte hat die sog. ”Nichtlineare Wissenschaft“ (im deutschen Sprachraum besser bekannt als ”Synergetik“) Forscher aus nahezu jeder Disziplin – seien es Mathematiker, Naturwissenschaftler oder Ingenieure aber auch Forscher aus den Geschichts- und Sozialwissenschaften bis hin zu Gehirnforschung und Kunst – herausgefordert und in ihren Bann gezogen. Sie umfaßt eine stetig wachsende Anzahl von interdisziplinären Arbeiten; ihre Attraktivität basiert wesentlich auf der Erkenntnis, daß nichtlineare Phänomene, obwohl sie in offensichtlich verschiedenen Zusammenhängen in Natur- und Ingenieurwissenschaften auftreten, oft gemeinsame Eigenschaften zeigen oder zumindest durch Verwendung ähnlicher Konzepte verstanden werden können. Diese gemeinsamen Konzepte oder Merkmale, üblicherweise Paradigmen genannt, bieten ein wirkungsvolles Instrumentarium, um über unsere traditionelle, mechanistische ”lineare“ Intuition hinaus zu einem tieferen Verständnis komplexer Naturvorgänge zu gelangen.”[1]*

### 1. Prolog

Drei der bedeutendsten nichtlinearen Paradigmen sind ‘Solitonen’, ‘deterministisches Chaos’ und ‘Fraktale’ – ihre Reihung entspricht der zeitlichen Abfolge, in der sie in den Blickpunkt des Interesses vieler Physiker während der letzten beiden Jahrzehnte gerückt sind. In ihnen manifestiert sich eine Revolution des physikalischen Weltverständnisses. Im folgenden werde ich versuchen, eines dieser faszinierenden Paradigmen, **deterministisches Chaos**, in ein relativ leicht faßbares theoretisches Umfeld einzubetten sowie eine theoretisch bisher nicht befriedigend modellierte Anwendung vorzustellen – die Demonstration synergetischer Begriffsbildungen am Beispiel des tropfenden Wasserhahns. Abschnitt 2 führt den Begriff ‘Synergetik’ und zugrundeliegende Konzepte ein. In Teil 3 wird gezeigt, daß eine geeignete mathematische Modellbildung das Auftreten chaotischer Zustände garantiert. Exemplarisch werden mathematische Notationen und Begriffe an einem der einfachsten und auch bekanntesten **diskreten dynamischen Systeme** vorgestellt, der kanonischen Form einer einparametrischen, quadratischen, längentreuen Abbildung. Sie ist der Prototyp eines synergetischen Systems mit einem äußeren Kontrollparameter, dessen Änderung selbstorganisierte Prozesse im Sinne der Synergetik verursacht: Bei speziellen Werten des Kontrollparameters (*kritischen Punkten*) geht das System in neue Zustände anderer Ordnung oder Struktur über (vgl. [2], Chap. 1.9). Abschließend beschreibt Abschnitt 4 an einem ausgewählten Beispiel, wie fundamentale Begriffe der Synergetik experimentell demonstriert werden können.

## 2. Synergetik, eine fächerübergreifende Disziplin

Die Lehre vom Zusammenwirken, was Synergetik wörtlich bedeutet, gestattet Erscheinungen in verschiedenen Gebieten wie Physik, Chemie, Biologie, Soziologie usw. unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu behandeln [3,4]. Den dabei gefundenen gemeinsamen Gesetzmäßigkeiten liegt die Tatsache zugrunde, daß das untersuchte Objekt nach außen zwar eine Einheit darstellt, streng genommen aber aus sehr vielen Untersystemen besteht. Allerdings kommt das Verhalten des Gesamtsystems in der Regel nicht durch eine (zufällige) Superposition von Eigenschaften dieser Untersysteme zustande. Das Gesamtsystem zeigt häufig neue Eigenschaften, die auf der Ebene der Untersysteme nicht existieren. Letztere wirken vielmehr konstruktiv zusammen und erzeugen so (spontan) ohne Eingriff von außen organisierte Strukturen (Selbstorganisation). Beispiele hierfür sind u. a. die Bildung einer Schneeflocke und – viel komplexer – das Wachstum von Pflanzen und Lebewesen [5]. Zentrales Anliegen der Synergetik ist die Suche nach allgemeinen Ordnungsprinzipien, die die selbstorganisierte Bildung von räumlichen, zeitlichen oder funktionellen Strukturen auf einer makroskopischen Skala sowohl in der belebten als auch in der nicht belebten Welt bestimmen [2].

Im Rahmen der vorliegenden kurzen Einführung ist es weder möglich noch beabsichtigt, ein Konzept zu entwickeln, das dem Leser in elementarisierter Form den nach Haken "harten Kern" der Synergetik nahebringt, d. h. das Prinzip der Instabilität, das Prinzip des Ordnungsparameters und das Versklavungsprinzip (siehe z. B. [2]). Auch soll nicht versucht werden, ein Beispiel zu geben, wie alle in der Synergetik wesentlichen Begriffe auf relativ elementarem Niveau eingeführt werden können, insbesondere da "ältere" Begriffsbildungen aus der Theorie der Systeme im thermischen Gleichgewicht von der Synergetik übernommen wurden und daher nicht als typisch für die Synergetik anzusehen sind. Angestrebt wird vielmehr, den in der Ausbildung von Lehramtskandidaten Tätigen Anregungen zu geben, wie das modernen Entwicklungen der Physik zugrundeliegende physikalische Weltbild unseren zukünftigen Lehrern in Form eines minimalen Stoffkanons vermittelt werden kann, sowie interessierten Studenten, u. a. auch unseren das Fach Physik nicht vertieft Studierenden, einen Einblick zu geben in wenige, im Rahmen der Synergetik neu entwickelte, fundamentale Begriffe und deren Inhalte, wie 'Selbstorganisation', 'deterministisches Chaos', 'Ordnungs-Ordnungsübergang' und zwar soweit möglich einfach mit der Aufforderung: "Schau das Bild an!"

In Abschnitt 4 wird dieses Bild mittels eines einfachen Demonstrationsexperimentes erzeugt, dessen "Bauteile" jedem bekannt sind: der tropfende Wasserhahn (für weitere etablierte Beispiele s. Ref. [6] sowie die Übersicht [7]); aber ebenso effizient kann dieses Bild als Ergebnis einer Computersimulation entstehen, was zu einem eminent sinnvollen Einsatz des Rechners in der Ausbildung sowohl von Lehramtsstudenten als auch von Schülern führt. Vorausgehen muß dabei die Übersetzung des realen Systems in ein mathematisches Modell,

dessen Entwicklung für den Lernenden überschaubar und verständlich zu sein hat. Will man von vorneherein auf reale Versuche verzichten, ist es nötig, aus der Vielzahl der bekannten strukturbildenden Prozesse ein Exemplar auszuwählen, das im Erfahrungsbereich der Lernenden liegt, und für dessen Verhalten sie zumindest teilweise ein 'Gefühl' haben. Damit scheidet in der Regel an und für sich sehr illustrative und typische Beispiele aus der Hydrodynamik oder der Reaktionskinetik bei der Modellwahl aus. Als Konsequenz bietet sich beispielsweise an, Probleme aus der Populationsdynamik einer und zweier Spezies zu behandeln [8]. Allerdings sind in der Physik Versuche essentieller Bestandteil sowohl der Erkenntnisgewinnung als auch der Wissensvermittlung. Experimentelle Daten bedürfen jedoch immer einer geeigneten Interpretation. Diese fußt auf unserem gegenwärtigen Weltverständnis, das gleichzeitig ein Spiegel herrschender Lehrmeinungen ist. In der Regel läßt sich ein Minimalkatalog von notwendigen Charakteristika mathematischer Modelle, die wesentliche Eigenschaften realer physikalischen Systemes beschreiben, aus den Meßdaten erschließen. In Abschnitt 4 werde ich diese Problematik am Beispiel einer empirischen Modellbildung ansprechen. Vorher sind jedoch einige fundamentale Begriffe zu klären.

### 3. Diskrete nichtlineare Dynamik

Wir sind gewohnt, viele physikalische Systeme, beispielsweise ein schwingendes Pendel, durch Differentialgleichungen zu modellieren. In der Synergetik lassen sich jedoch Beispiele finden, für die eine solche kontinuierliche Beschreibung weniger geeignet ist, beispielsweise das Wachstum einer Insektenpopulation, die zeitliche Entwicklung der Pulsfrequenz eines Patienten (Herzforschung), die Anzahl von Waffen einer Gattung in einem Modell für Wettrüsten oder die Zeitintervalle zwischen den Tropfen eines undichten Wasserhahns. Darüberhinaus basieren numerische Lösungsverfahren von Differentialgleichungen auf verschiedenen Diskretisierungsmethoden, so daß von integrierbaren Fällen abgesehen im Forschungszweig der 'computational physics' diskrete dynamische Systeme die eigentlichen der nichtlinearen Physik inhärenten Modelle sind.

Ein diskretes dynamisches System werde im folgenden durch ein System von gewöhnlichen Differenzgleichungen beschrieben:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (1)$$

mit  $t \in \mathbb{N}$ ,  $x_t := (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}) \in \mathbb{R}^m$  und  $f := (f_1, f_2, \dots, f_m): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  reelle Funktion. In Analogie zu kontinuierlichen Systemen werden wir den  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  auch als Phasenraum bezeichnen. Eine Lösung des Systems (1) zum Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  läßt sich iterativ berechnen:  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ , ... Die dabei erzeugte Folge von  $x_t$ -Werten ist die gesuchte Lösung und heißt auch Bahn des Punktes  $x_0$  unter  $f$ . Die Theorie der **diskreten nichtlinearen Dynamik** untersucht die Eigenschaften solcher Bahnen. Ehe wir uns einem konkreten

Beispiel zuwenden, möchte ich mathematisch sauber einige fundamentale Begriffe dieser Theorie einführen, um von klaren Begriffsbildungen ausgehen zu können [9]:

- $x^* \in \mathbb{R}^m$  heißt *Fixpunkt von  $f$*  (und damit der Iteration (1))  $\iff x^* = f(x^*)$ .
- die  $n$ -fache Komposition von  $f$  heißt  *$n$ -fache Iterierte von  $f$* :  

$$f^0 := id, \quad f^1 := f, \quad f^2 := f \circ f, \quad f^n := f \circ f^{n-1}, \quad n > 2.$$
- die *Bahn* (auch *Orbit* oder *Trajektorie*)  $O_f(x_0)$  eines Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  unter  $f$  ist  
 $O_f(x_0) := \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ .
- die Bahn eines Fixpunktes von  $f^p$  unter  $f$  heißt *periodischer Orbit der Periode  $p$*  oder  *$p$ -Zykel*,  $p \geq 1$ .
- ein Fixpunkt  $x^*$  von  $f$  heißt *stabil* und damit *Attraktor der Periode 1*  $\iff$  Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $x^*$ , so daß für alle  $x_0 \in U$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$
- ein stabiler  $p$ -Zykel heißt *Grenzyklus* oder auch *Attraktor der Periode  $p$* ,  $p \geq 1$ .

Verlassen wir nun die abstrakte Definition und wenden uns einem konkreten Beispiel zu! Für ein systematisches Studium der Strukturvielfalt synergetischer Systeme sind dynamische Systeme gut geeignet, die von einem äußeren Parameter  $\mu$ , dem Kontrollparameter (z.B. Temperatur, Stärke einer treibenden Kraft, ...), abhängen. Die einfachsten Beispiele sind einparametrische Familien von eindimensionalen ( $m = 1$ ) Abbildungen (auf einem Intervall),

$$x_{t+1} = f_\mu(x_t), \tag{2}$$

mit  $x_t \in \mathbb{R}$  und  $f_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einmal stetig differenzierbar. Die wohl am häufigsten zitierte und am intensivsten studierte Funktionenklasse besitzt für festen Kontrollparameter  $\mu$  ein quadratisches Maximum. Als Definitionsbereich wird ein kompaktes Intervall gewählt. Der bekannteste Vertreter ist die logistische (Differenzen-)Gleichung (Iteration einer Parabelfunktion), die in verschiedenen Gestalten untersucht worden ist:

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, \tag{3a}$$

$$f_a(x) = a(1 - x)x, \tag{3b}$$

$$f_b(x) = b(1 - x)x + x. \tag{3c}$$

Die Darstellungen (3a) bis (3c) lassen sich durch geeignete lineare Transformationen ineinander überführen. Die Form (3a) erleichtert wegen ihrer Symmetrie mathematische Betrachtungen. Das Maximum der Funktionenfamilie (3b) liegt im Positiven, weshalb sie mit  $[0, 1]$  als Definitionsbereich und  $a > 0$  der experimentellen Situation in Teil 4 angepaßt ist, da dort nur positive Argumente interessieren. Im folgenden werde ich einen einführenden Überblick über Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften von Trajektorien der logistischen Gleichung in dieser Darstellung geben, aus Raumgründen jedoch ohne Beweis [10]:

- Stabilitätskriterium für einen Fixpunkt  $x^*$ :  $x^*$  ist (lokal) stabil  $\iff |f'(x^*)| < 1$ .

[Der strenge Beweis dieses Kriteriums folgt den Überlegungen die zu Glchg. (4) für die Berechnung der Lyapunovzahl führen. Leicht einsichtig kann es anhand von Abb. 1 gemacht werden, wo für zwei grundlegende Situationen gezeigt ist, wie die Iterierten graphisch konstruiert werden können. Sei  $x^*$  ein Fixpunkt von  $f$ , dann liegt der Punkt  $(x^*, f(x^*))$  auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Die Tangente durch diesen Punkt schließt mit der  $x$ -Achse entweder einen Winkel (i)  $< 45^\circ$  oder (ii)  $> 45^\circ$  ein (Den Fall von genau  $45^\circ$  wollen wir hier nicht betrachten). Im ersten Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$  für alle Punkte aus einer genügend kleinen Umgebung von  $x^*$ , wohingegen im zweiten Fall eine Umgebung von  $x^*$  existiert, so daß für einen Punkt  $x_0 \neq x^*$  aus dieser Umgebung nach  $n_0$ -Schritten  $f^{n_0}(x_0)$  diese Umgebung verlassen hat. Dieses abstoßende Verhalten charakterisiert einen instabilen Fixpunkt (Repellor).]

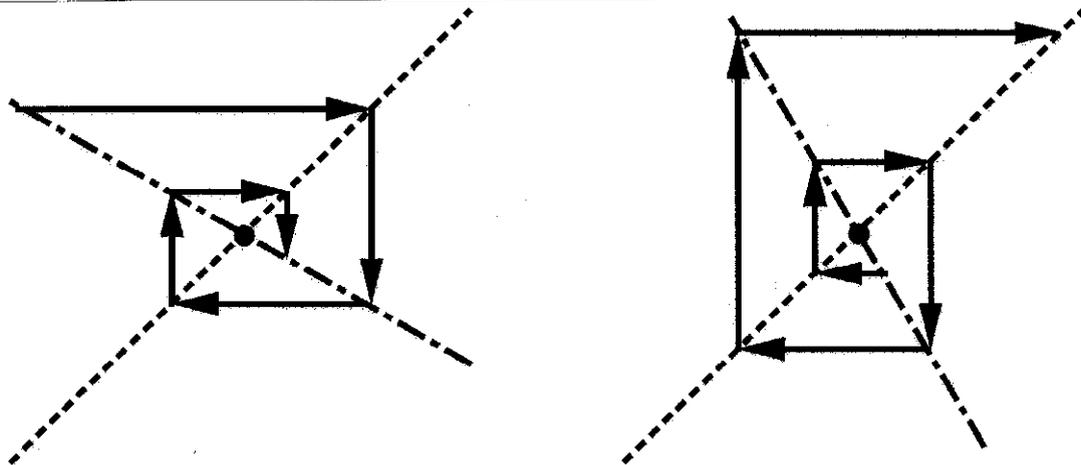


Abb. 1: Iterationsverhalten in der Nähe eines stabilen (linkes Bild) und eines instabilen (rechtes Bild) Fixpunktes. Der Graph von  $f_a$  ist strichpunktiert; die Winkelhalbierende des 1. Quadranten ist punktiert; die mit Pfeilen versehene durchgezogene Kurve gibt die graphische Iterationsregel an: Gehe von einem Startpunkt zum Funktionsgraphen, vom Graphen zur Winkelhalbierenden, von dieser wieder zum Graphen usw.

- Stabilitätskriterium für einen  $p$ -Zykel  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ :  
 $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  ist (lokal) stabil  $\iff |(f^p)'(x_r)| < 1, \quad r = 0, \dots, p-1.$   
 [Dies bedeutet, daß jedes Element des  $p$ -Zykels ein (lokal) stabiler Fixpunkt von  $f^p$  ist.]
- Nicht alle Punkte konvergieren unter der Iteration gegen einen stabilen periodischen Orbit.  
 [Beispielsweise existieren instabile Fixpunkte; so ist  $x_0 = 0$  Repellor für  $a > 1$ . Die Abbildung  $f_4$  generiert den Orbit  $\{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ .]
- $f_a$  besitzt zu festem  $a$  höchstens einen stabilen periodischen Orbit.  
 [Der Fall konkurrierender Attraktoren mit unterschiedlichen Einzugsgebieten (Basins) tritt hier also nicht auf.]

- Fast alle Punkte konvergieren unter der Iteration (im Falle der Existenz) gegen den stabilen periodischen Orbit.  
[Genauer ist das (Lebesgue-) Maß derjenigen Punkte, die nicht gegen den stabilen periodischen Orbit konvergieren 0. In der Theorie nichtlinearer Systeme sind mehrere Maß- und Dimensionsbegriffe wesentlich. So erfordert das eingangs erwähnte Paradigma des Fraktals die Klärung des Begriffs der gebrochenen (fraktalen) Dimension. Eine Rolle spielen Fraktale in dynamischen Systemen als sog. seltsame Attraktoren (vgl. Abschnitt 4), jedoch erzeugt die hier betrachtete Iteration der Funktionenfamilie (3b) keinen seltsamen Attraktor.]
- Wenn  $f_a$  einen stabilen periodischen Orbit besitzt, so wird  $f_a^n(\frac{1}{2})$  für  $n \rightarrow \infty$  von diesem 'angezogen'.

Die genannten Eigenschaften werfen nun die Frage auf, was mit einem Anfangspunkt  $x_0$  unter der Iteration geschieht, wenn kein stabiler periodischer Orbit existiert. Zwei wesentliche Fälle wurden bisher untersucht [11, p. 15], die ich grob skizzieren möchte. (Auf den ersten Fall werde ich im Zusammenhang mit der Lyapunovzahl später noch genauer eingehen.) Möglich ist einmal die sog. *sensitive Abhängigkeit* von den Anfangsbedingungen, d.h. aus der Kenntnis eines Orbits mit Anfangspunkt  $x_0$  kann nicht auf den Verlauf eines Orbits mit einem Anfangspunkt sehr nahe bei  $x_0$  geschlossen werden (Gedächtnislosigkeit bzgl. der Herkunft eines Punktes); dies kann mit ergodischem Verhalten gekoppelt sein, d.h. jeder Teil des Phasenraums (oder auch Intervalls) wird von einem Orbit mit etwa gleicher Wahrscheinlichkeit 'besucht'. Ein Beispiel wiederum bietet die Funktion  $f_a$ ,  $a = 4$ . Der Leser iteriere verschiedene Startwerte und mache sich durch eine kleine Variation der Startwerte klar, daß ein deterministisches System eine nicht vorhersagbare 'zeitliche' Entwicklung besitzen kann. Ein zweiter möglicher Fall ist die Existenz eines nichtperiodischen stabilen Orbits (und damit eines nichtperiodischen Attraktors [11]), der das Lebesguemaß 0 besitzt; dabei tritt keine Sensitivität bzgl. der Anfangsbedingung auf. Diese Orbitenstruktur zeigt die durch  $f_a$ ,  $a = 3,5700\dots$  bestimmte Iteration. Für fast alle Anfangspunkte bleiben die Bahnen benachbarter Punkte dicht zusammen, das System wird daher als *nicht mischend* bezeichnet.

Nach diesem Überblick über mögliche Formen von Orbits und Attraktoren diskutiere ich im Detail, wie sich die Struktur der Lösungen der logistischen Gleichung bei einer *systematischen* Variation des Kontrollparameters  $a$  ändert. Dabei wechselt Gestalt oder/und Typ des Attraktors. Letzteres stellt die mathematische Beschreibung eines Selbstorganisationsprozesses (Übergang in Zustände anderer Ordnung) dar. Folgende Phänomene lassen sich konkret beobachten: Ein Fixpunkt bzw. stabiler  $p$ -Zykel kann seinen Wert bzw. die Werte seiner Elemente und damit seine Lage bzw. Form im Phasenraum ändern. Die topologische Struktur eines Attraktors kann wechseln, wenn der Kontrollparameter einen speziellen Punkt kreuzt. So entsteht bei einem bestimmten *Bifurkationspunkt* (Gabelungspunkt)  $a_{crit}$  aus einem Einerzykel ein Zweierzykel (Beispiel eines

Ordnungs-Ordnungs-Übergangs). Einer ersten Bifurkation können weitere folgen. Man kann nun fragen, was nach einer bestimmten Sequenz solcher Periodenverdopplungen geschieht. Von den vielen in nichtlinearen Systemen denkbaren Möglichkeiten werden die sowohl theoretisch als auch im Experiment erfolgreich studierten, also die 'wahrscheinlicheren' Fälle, *Szenarien* genannt. Generell lassen sich mit ihrer Hilfe Wege ins Chaos (in der Kontinuumsmechanik spricht man von Turbulenz) erfolgreich beschreiben. Im vorliegenden Beispiel treten Übergänge von periodischen Orbits ( $p$ -Zykeln) zu nichtperiodischen, quasi-stochastischen, irregulären Trajektorien auf, die ein Beispiel für *deterministisches Chaos* darstellen. Der Begriff 'deterministisch' bezieht sich dabei auf die Tatsache, daß die Trajektorien durch deterministische Gleichungen, wie (3b), bestimmt sind. In deterministischen Systemen ist Chaos prinzipiell mit einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen verknüpft: Angenommen die Startpunkte zweier Orbits besitzen eine Entfernung  $d_0$ , dann sei der Abstand der Orbits nach  $n$ -Iterationen  $d_n := d_0 e^{\Lambda(n)n}$ . Ist nun  $\Lambda(n)$  für alle  $n$  mit  $n > n_0$  positiv, so divergieren die beiden Trajektorien exponentiell. Das Vorzeichen der Zahl  $\Lambda = \Lambda(\infty)$  erlaubt daher, chaotische Bahnen zu diagnostizieren. Mit  $d_0 = \epsilon$ ,  $\epsilon$  genügend klein, kann die Entfernung nach einer Iteration  $d_1 = |f_a(x_0 + \epsilon) - f_a(x_0)|$  durch  $|f'_a(x_0)|\epsilon$  gut approximiert werden; nach  $n$ -Iterationen ergibt sich also  $d_n = |f'_a(x_{n-1})|d_{n-1} = \prod_{t=0}^{n-1} |f'_a(x_t)|$ , woraus sich die Lyapunovzahl  $\Lambda$  bestimmen läßt:

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |f'_a(x_t)|.$$

Bei der folgenden recht straffen Darstellung skizziere sich der Leser zum besseren Verständnis die Folge der Strukturänderungen als Funktion des Kontrollparameters  $a$ . Einen recht guten Überblick gewinnt man bei einer graphischen Darstellung der Attraktoren als Funktion von  $a$  (siehe z.B. [11], p. 26 oder [R7d], p. 136). Nichttriviales Verhalten findet sich für  $1 < a \leq 4$ , denn für Parameterwerte  $a < 1$  ist 0 Attraktor des Systems und für  $a > 4$  gilt  $x_n \rightarrow -\infty$  bei  $n \rightarrow \infty$ . In diesem Parameterintervall findet sich zwei prominente Szenarien: das *Feigenbaum-Szenarium* und das *Pomeau-Manneville-Szenarium*. In Abhängigkeit vom Wert von  $a$  existieren stabile Attraktoren beliebiger Ordnung. Für  $1 < a < a_0 := 3$  ist  $x^* = 1 - 1/a$  stabiler Fixpunkt, d.h. ein Attraktor der Periode 1 (1-Zykel). Mit wachsendem  $a$  wird  $x^*$  bei  $a = a_0$  instabil, und gleichzeitig erscheint ein stabiler 2-Zykel, der bei  $a = a_1$  instabil wird und in einen stabilen 4-Zykel bifurkiert. Dieses Phänomen wiederholt sich bei weiterer Erhöhung von  $a$ , d.h. ein  $2^j$ -Zykel ist im Intervall  $(a_{j-1}, a_j)$  stabil und gebiert bei  $a = a_j$  einen  $2^{j+1}$ -Zykel, der in  $(a_j, a_{j+1})$  stabil ist (Kaskade von Periodenverdopplungen, vgl. [13]). Die Folge der  $a_j$  ist nach oben beschränkt und konvergiert gegen  $a_\infty := 3,5700\dots$ . Für  $a = a_\infty$  hat  $f_a$  einen aperiodischen Attraktor (der nicht seltsam ist). Weiter gibt es eine Zahl  $\delta := 4,66920\dots$  (*Feigenbaumkonstante*), so daß  $|a_j - a_\infty| \sim \text{const} \cdot \delta^{-j}$  für  $j \rightarrow \infty$ . Sie ist universell, d.h. ihr Wert unabhängig von der speziellen Form von  $f_a$ , bis auf die Bedingung eines quadratischen Maximums bei

$\bar{x}$ :  $f(\bar{x}) - f(x) \sim |x - \bar{x}|^2$  für  $|x - \bar{x}|$  genügend klein [13]. Die genannten Bifurkationen der Orbitsstruktur von Gleichungen (3a/b/c) sind sog. *Heugabel*-Bifurkationen. Diese sind typisch für das Feigenbaum-Szenarium (Periodenverdopplungsweg ins Chaos). Die Orbits zeigen im Intervall asymptotisch eine selbstähnliche Struktur, der  $2^j$ -Zykel enthält den  $2^{j-1}$ -Grenzzzykel auf einer um  $\alpha := 2,502907875095892848\dots$  gestauchten Skala für  $j \rightarrow \infty$ . Diese Zahl ist ebenfalls universell [13]. Oberhalb von  $a = a_\infty$  existiert die beschriebene Bifurkationskaskade für Grenzzyklen der Basisperiode  $p \neq 1$  ( $p \cdot 2^j$ -Zykel). Nach  $2r$ -Zykeln findet sich etwa bei  $a = 3,6786\dots$  der erste Orbit mit ungerader Periode  $r$ ,  $r$  sehr groß. Mit wachsendem  $a$  erscheinen Zykel mit immer kürzeren ungeraden Perioden, bis bei  $a_c := 3,8284\dots$  der erste 3-Zykel auftaucht (inverse Kaskade). Für  $a > a_c$  besitzt  $f_a^3$  einen stabilen und einen benachbarten instabilen Fixpunkt; beide kollidieren bei  $a = a_c$ . Diese inversen *Sattelpunkt*-Bifurkationen sind kennzeichnend für das Pomeau-Manneville-Szenarium. Damit ist nun jede ganzzahlige Periode anwesend, aber es finden sich auch unzählige aperiodische Trajektorien. Für Werte von  $a$  nahe bei  $a_c$  herrscht sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, d.h. ursprünglich benachbarte Trajektorien divergieren exponentiell. Es hat sich das Schlagwort eingebürgert: "*Periode 3 impliziert Chaos*." Dieser chaotische Bereich ist von einer Vielzahl periodischer Fenster durchsetzt. Abschließend ist noch anzumerken, daß allgemeine Regeln bekannt sind, welche Perioden welche anderen implizieren (Satz von Sarkovskii, [12]).

#### 4. Synergetische Effekte am Beispiel des tropfenden Wasserhahns

Zur experimentellen Erzeugung einiger synergetischer Effekte habe ich ein wohlbekanntes Beispiel aus dem täglichen Leben gewählt: Die von einem undichten Wasserhahn erzeugte Folge von 'Wartezeiten' zwischen aufeinander folgenden fallenden Tropfen. Das regelmäßige Klacken der aufschlagenden Tropfen bei niedrigen Tropfraten, das an das Ticken einer Uhr erinnert, ist unseren Ohren (auch denen von Studenten und Schülern) wohlvertraut. Wird die Durchflußrate des Wassers erhöht, so wird das von den Tropfen erzeugte Lautmuster dichter und kann irregulär werden; es lassen sich viele für nichtlineare Systeme charakteristische Phänomene beobachten, die in hohem Maße unabhängig von der im System inhärenten mikroskopischen Physik sind, wie Bifurkationsfolgen (und damit Selbstorganisation), Übergänge zum Chaos, sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, Hystereseeffekte sowie die experimentelle Realisation fraktaler Gebilde (augenscheinlich in Form seltsamer Attraktoren). Das System bietet ein exklusives Beispiel wie eine empirische Modellierung auf der Basis gewonnener Meßdaten (Der Begriff 'empirisch' ist hier gebraucht im Gegensatz zu einer Modellbildung auf der Grundlage mikroskopischer Vorgängen wie beispielsweise den Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung einer Flüssigkeit) Vorhersagen über das Verhalten des Systems erlaubt bzw. die Grenzen der Vorhersagbarkeit im Prinzip deterministischer physikalischer Vorgänge

zeigt (im Sinne von genauer Berechenbarkeit des Systemzustandes, da die kleinste Abweichung in den Anfangsbedingungen große Fehler für den vorherzusagenden Zustand zur Folge haben kann).

Die ersten Untersuchungen am undichten Wasserhahn wurden vor knapp zehn Jahren von Robert Shaw und Mitarbeitern an der Univ. of California at Santa Cruz durchgeführt [14]. Die Arbeiten gehen auf Anregungen von O.E. Rössler [15] zurück und verwenden destilliertes Wasser konstanter Temperatur [16, 17]. Der Füllstand eines Wasserreservoirs – und damit der Druck im ‘Wasserhahn’ – wird mit Hilfe eines modifizierten Vergasers konstant gehalten, die Durchflußrate durch ein mit einem Schrittmotor gesteuertes Nadelventil reguliert. Als Tropfenerzeuger dient ein Ventil aus Messing mit einer Austrittsöffnung von 1 mm Innendurchmesser. Die mit dieser Anordnung erreichbare maximale Tropfrate beträgt ca. 20 Tropfen pro Sekunde. Bei einer weiteren Erhöhung der Durchflußrate erhielten Shaw et al. einen laminaren Wasserstrahl [17]. Neuere Arbeiten zu diesem Thema variieren neben der Durchflußrate sowohl die Temperatur als auch die Oberflächenspannung der Flüssigkeit [18, 19].

Ich habe das System in verschiedenen Spielarten mit einfachen Mitteln nachgebaut. Die Austrittsöffnung des Wasserhahns ist durch eine Düse (Außendurchmesser 10 mm, Innendurchmesser am Ausgang 2 mm, Länge 40 mm) ersetzt. Zur Begrenzung der Durchflußmenge wird kein Nadelventil wie von Shaw et al. [17] benutzt, sondern eine Glaskapillare mit 1,2 mm Innendurchmesser (vgl. [18-20]). Zur Regelung des Drucks und damit der Durchflußrate dient im einfachsten Fall ein einziges Wasserreservoir, bei dem sowohl der Füllstand als auch die Höhe des Tanks relativ zur Düse variiert werden kann. Das Zeitintervall zwischen zwei Tropfen kann mit einem He-Ne-Laser (0,5 mW) und einer Photodiode oder einer käuflichen Infrarotgabellichtschranke gemessen werden. Auch ein Mikrofon wurde als Detektor getestet. Im Gegensatz zu Ref. [17] und [20] sind bei dem gewählten Versuchsaufbau Tropfraten von ca. 100 Tropfen pro Sekunde möglich. Bei hohen Tropfraten bildet sich am Ausgang der Düse ein kurzer Wasserjet, der in separierte Tropfen übergeht. Der kritische Faktor ist Formgebung und Ausführung der Düse, die keine Turbulenzen erzeugen darf. Will man nur qualitativ die Strukturänderungen als Funktion des Druckes beobachten, genügt ein Speicheroszilloskop als Registriergerät; für quantitative Messungen ist eine computerunterstützte Erfassung der Meßdaten unumgänglich [21].

Die Abbildungen 2 bis 4 zeigen die mit einem Speicheroszilloskop gemessene Ausgangsspannung einer empfindlichen Infrarotlichtschranke. Abgebildet wurde ein Zeitintervall von 1 s (Abb. 2 und 3) bzw. 0,5 s (Abb. 3). Die gefundenen Periodenverdopplungen lassen vermuten, daß die Wartezeiten  $T_t$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tropfen zumindest für nicht zu kleine Tropfraten korreliert sind, und daß darüberhinaus in dem System das Feigenbaum-Szenarium realisiert sein könnte. In der Tat fanden Shaw et al im chaotischen Bereich bei der Auftragung  $T_{t+1}$  gegen  $T_t$  u.a. einen verrauschten “parabelförmigen” Orbit ([17, Abb. 2d), was eine empirische Modellierung  $T_{t+1} = a(1 - T_t)T_t$  nahelegt. Jedoch zeigt eine genauere Analyse der Daten [20], daß mindestens eine Korrelation der Wartezeiten zwischen drei aufeinanderfolgenden Tropfen vorzuliegen scheint, und daß der Orbit in der Auftragung  $(T_{t+2}, T_{t+1}, T_t)$  Ähnlichkeit zum Henon-Attraktor ( $p = 3,45$ ;  $q = 0,345$ ) zeigt.

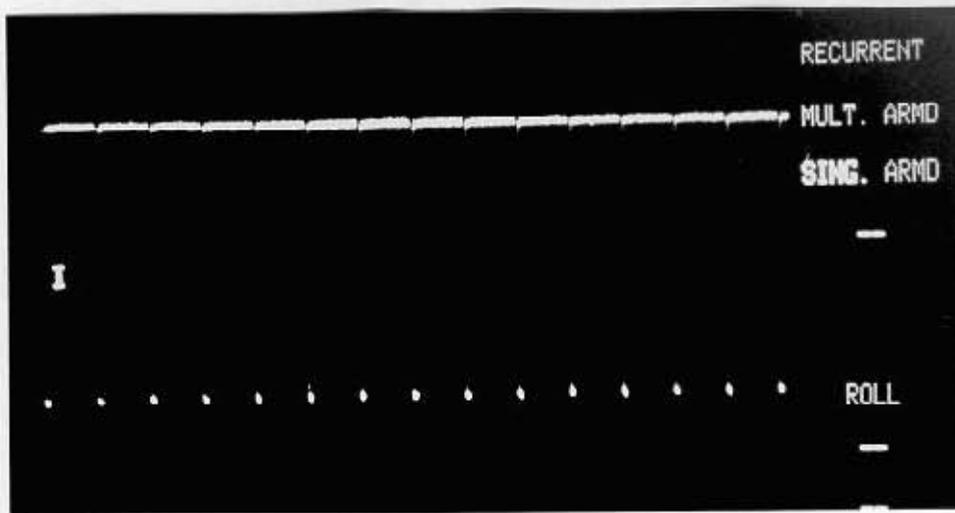


Abb. 2: Einerzykel nahe der Bifurkation in einen stabilen 2-Zykel bei einer Tropfrate von etwa 15 Hz.

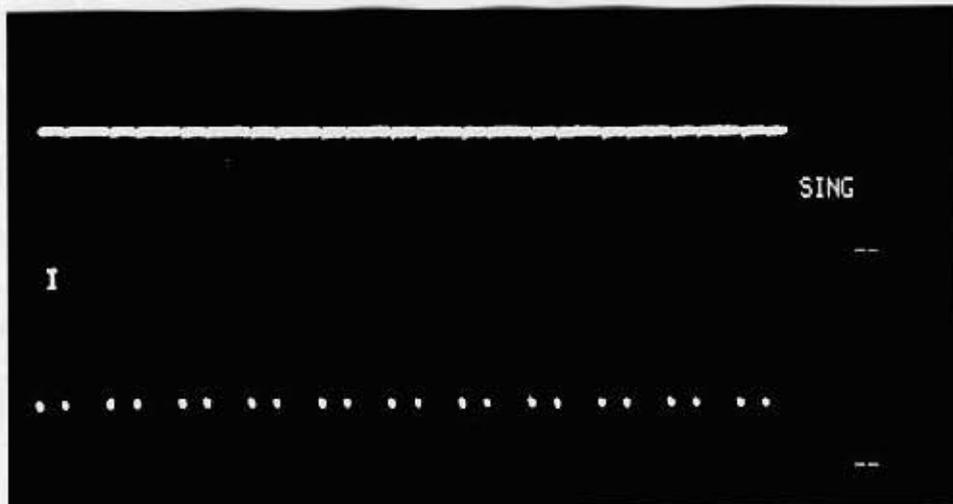


Abb. 3: Zweierzykel bei etwa 22 Hz.

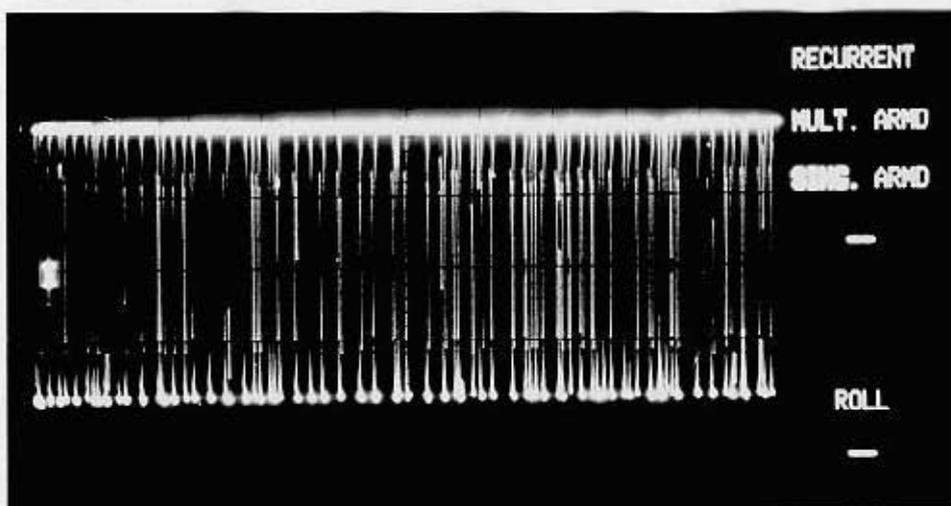


Abb. 4: Aperiodischer Orbit bei einer Tropfrate von etwa 90 Hz.

Letzterer besitzt fraktale Struktur und ist daher **seltsam**. Erzeugt wird er von der Henon-Abbildung, einer zweidimensionalen, zweiparametrischen, quadratischen Abbildung, definiert durch

$$x_{t+1} = y_t + p x_t(1 - x_t) \quad (5.1)$$

$$y_{t+1} = q(x_t - \frac{1}{2}). \quad (5.2)$$

Genauer stellt Glchg. (5.1/2) eine Normalform der allgemeinen zweidimensionalen quadratischen Abbildung mit konstanter Funktionaldeterminante ( $q$ ) dar. Der Kontrollparameter  $q$  beschreibt daher lokale Dissipation. Elimination von  $y_t$  aus (5.1) liefert als Iterationsvorschrift eine Differenzgleichung zweiter Ordnung für die  $x$ -Koordinate  $x_{t+1} = p x_t(1 - x_t) + q(x_{t-1} - \frac{1}{2})$ , was zeigt, daß  $x_{t+1}$  sowohl von  $x_t$  als auch von  $x_{t-1}$  abhängt. In dieser Form kann die Henon-Abbildung (zumindest für bestimmte Durchflußraten [21]) als empirisches zweiparametrisches mathematisches Modell für die Vorhersage der Zeitintervalle zwischen zwei Tropfen dienen. Zu klären bleibt der Zusammenhang zwischen den Parametern von Glchg. (5.1/2) und den experimentellen Parametern. Ein experimenteller Parameter ist natürlicherweise der herrschende Druck, ein weiterer – laminare Strömung vorausgesetzt – die Dämpfung der durch den Rückstoß des abgelösten Tropfens in Schwingungen versetzten Wassersäule in der Düse (sensitiv auf Form und Material der Düse sowie Art der Wasserzuführung in die Düse). Es existiert bisher kein mikroskopisches Modell, das klärt, wie ein Wasserhahn tropft. Ebenso steht eine systematische Regressionsanalyse aus. Regressionskurven der Daten wurden von Shaw [16] durch Untersuchung eines simplen kontinuierlichen mechanischen Modells "geschätzt". Eine linear mit der Zeit wachsende Masse  $M$  (Modell des Tropfens) dehnt eine Schraubenfeder (Rückstellkraft durch Oberflächenspannung). Wenn die Dehnung eine bestimmte Länge überschreitet, wird die Masse  $M$  schlagartig verkleinert (Lösen eines Tropfens) und zwar um einen Betrag, der proportional zur Geschwindigkeit von  $M$  im Moment des Ablösens ist. Dieses Modell besitzt nur drei gekoppelte dynamische Variable und zeigt einmal mehr, daß ein Modell von nur wenigen Dimensionen in der Lage ist, das chaotische Verhalten eines hochdimensionalen realen Systems manchmal adäquat zu beschreiben. Eigene qualitative Messungen zu diesem Problem sind in Vorbereitung [21].

## 5. Danksagung

Ich danke dem Lehrstuhl Experimentalphysik IV der Universität Bayreuth für die leihweise Bereitstellung eines Speicheroszilloskops.

## 6. Literatur

- [1] Campbell, D.K., Direktor des Center for Nonlinear Studies (Los Lamos National Laboratory, U.S.A.) anlässlich des Emil-Warburg-Festkolloquiums 1990 an der Universität Bayreuth

- [2] Haken, H.: Advanced Synergetics. Springer Series in Synergetics, Vol. 20, (Berlin: Springer 1983).
- [3] Haken, H. und Graham, R., Synergetik, die Lehre vom Zusammenwirken, Umschau (1971), S. 191–195.
- [4] Der "Vater" der Synergetik, H. Haken, schreibt darüber: "*I have called this discipline 'synergetics'. What we investigate is the joint action of many subsystems (mostly of the same or a few different kinds) so as to produce structure and functioning on a macroscopic scale. On the other hand, many different disciplines cooperate here to find general principles governing self-organizing systems.*" ([5], p. VIII).
- [5] Haken, H.: Synergetics, An Introduction. Springer Series in Synergetics, Vol. 1, (Berlin: Springer 1977).
- [6] Brun, E., Von Ordnung und Chaos in der Synergetik, *PhuD* 4 (1985), S. 289–305.
- [7] Stetzenbach, W. und Jodl, H.J., *PhuD* 3 (1989), S. 251–260.
- [8] Weber-Milbrodt, S.M.: Simulation eines synergetischen Modells: Synergetik und dynamische Systeme, unveröffentlicht.
- [9] Leider bin ich schon auf mehr als eine Arbeit mit didaktischem Anspruch gestoßen, wo versucht wird, Vereinfachung auf Kosten von klarer Begriffsbildung zu erzielen, was dem bemühten Neuling in der Regel ein wirkliches Verständnis verschließt.
- [10] Die Eigenschaften sind für eine Klasse von Funktionen auf einem Intervall mit quadratischem Maximum gültig (unimodale Funktionen). Genaue Informationen findet der interessierte Leser in der Monographie [11] sowie in [12].
- [11] Collet, P. und Eckmann, J.-P., Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, (Basel: Birkhäuser 1980).
- [12] Devaney, R.L., An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd edition, (Redwood City, CA: Addison Wesley 1989)
- [13] Feigenbaum, M.J., Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, *J. Stat. Phys.* 19 (1978), S. 25–52.
- [14] Shaw, R., Martien, P. und Scott, P., Vortrag auf der Conference on Order and Chaos, Los Alamos 1982.
- [15] Rössler, O.E. in: Haken, H. (ed.), Synergetics, A Workshop. Springer Series in Synergetics, (Berlin: Springer 1977), pp. 174–183.
- [16] Shaw, R., The Dripping Faucet as a Model Chaotic System (Santa Cruz, CA: Aerial Press 1984)
- [17] Martien, P., Pope, S.C., Scott, P.L. and Shaw, R.S., *Phys. Lett.* 110A, (1985), pp. 399–404.
- [18] Wu, X., Tekle, E. and Schelly, Z.A., *Rev. Sci.Instrum.* 60, (1989), pp. 3779–3782.
- [19] Wu, X. and Schelly, Z.A., *Physica D* 40, (1989), pp. 433–443.
- [20] Cahalan, R.F., Leidecker, H. and Cahalan, G.D., *Comput. Phys.* 4, (1990), pp. 368–383.
- [21] Weber-Milbrodt, S.M., in Vorbereitung.